



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**Υπολογιστική Γεωμετρία για Καμπύλα Αντικείμενα:  
Διαγράμματα Voronoi στο Επίπεδο**

**Γεώργιος Μ. Τζούμας**

**ΑΘΗΝΑ**  
**ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009**



## **ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Υπολογιστική Γεωμετρία για Καμπύλα Αντικείμενα:  
Διαγράμματα Voronoi στο Επίπεδο

**Γεώργιος Μ. Τζούμας**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:** Ιωάννης Εμίρης, Καθηγητής ΕΚΠΑ

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ:**

Ιωάννης Εμίρης, Καθηγητής ΕΚΠΑ

Θεοχάρης Θεοχάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

Παναγιώτης Κακλής, Καθηγητής ΕΜΠ

## **ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

**Ιωάννης Εμίρης,**  
Καθηγητής ΕΚΠΑ

**Θεοχάρης Θεοχάρης,**  
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

**Παναγιώτης Κακλής,**  
Καθηγητής ΕΜΠ

**Μενέλαος Καραβέλας,**  
Επίκουρος Καθηγητής Παν. Κρήτης

**Ηλίας Κουτσουπιάς,**  
Καθηγητής ΕΚΠΑ

**Bernard Mourrain,**  
Διευθυντής Ερευνών INRIA Sophia-Antipolis, Γαλλία

**Λεωνίδας Παληός,**  
Αναπληρωτής Καθηγητής Παν. Ιωαννίνων

Ημερομηνία εξέτασης: 7 Σεπτεμβρίου 2009



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διατριβή αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα του ακριβούς υπολογισμού του γράφου Delaunay (και του δυϊκού διαγράμματος Voronoi) ενός συνόλου, ενδεχομένως τεμνόμενων, κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων του Ευκλείδειου επιπέδου, που δίνονται σε παραμετρική μορφή. Ψευδοκύκλοι ονομάζονται κλειστές καμπύλες, τα ζεύγη των οποίων τέμνονται σε δύο το πολύ σημεία. Ο γράφος Delaunay κατασκευάζεται αυξητικά. Προτείνουμε αποτελεσματικούς αλγορίθμους για όλα τα απαιτούμενα κατηγορήματα, αναλύοντας την αλγεβρική τους πολυπλοκότητα, υπό το πρότυπο της ακριβούς αριθμητικής. Εστιάζουμε στο INCIRCLE, το οποίο αποτελεί το δυσκολότερο κατηγορήμα, εκφράζοντάς το με ένα απλό αραιό πολυωνυμικό σύστημα  $5 \times 5$ , το οποίο θα μας οδηγήσει σε μία αποτελεσματική υλοποίηση μέσω διαδοχικών απαλοιφουσών Sylvester και ενός λήμματος παραγοντοποίησης. Για να επιταχύνουμε τους αλγεβρικούς υπολογισμούς, μελετάμε ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες του προβλήματος και παρέχουμε έναν αλγόριθμο υποδιαίρεσης τετραγωνικής σύγκλισης, ο οποίος μας επιτρέπει να απαντάμε στο κατηγορήμα σε πραγματικό χρόνο, στις μη εκφυλισμένες περιπτώσεις. Τέλος, υλοποιούμε τις παραπάνω τεχνικές για ελλείψεις σε C++, βασιζόμενοι στη βιβλιοθήκη CGAL. Πρόκειται, απ' όσο γνωρίζουμε, για την πρώτη ακριβή υλοποίηση μη γραμμικής υπολογιστικής γεωμετρίας η οποία χειρίζεται αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 184. Για την κατασκευή του γράφου Delaunay ενός συνόλου 128 μη τεμνόμενων ελλείψεων, ο κώδικάς μας χρειάζεται 98 sec, όταν δεν προκύπτουν εκφυλισμένες περιπτώσεις. Δείχνουμε ότι οι εξειδικευμένες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν για ελλείψεις είναι γρηγορότερες από γενικό λογισμικό συμβολικών-αριθμητικών υπολογισμών. Επιπλέον, η υλοποίησή μας είναι γρηγορότερη από τον υπολογισμό του γράφου Delaunay ευθυγράμμων τμημάτων της CGAL, όταν οι ελλείψεις προσεγγίζονται με  $\nu$ -γωνια, με  $\nu > 15$ , και από το διάγραμμα Voronoi σημείων, όταν κάθε έλλειψη προσεγγίζεται με περισσότερα από 240 σημεία.

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:** Υπολογιστική Γεωμετρία

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** γράφος Delaunay, διάγραμμα Voronoi, ακριβής υπολογισμός, παραμετρική καμπύλη, υλοποίηση CGAL, γεωμετρικό κατηγορήμα, συμβολικοί-αριθμητικοί υπολογισμοί



## ABSTRACT

In this dissertation we examine the problem of computing exactly the Delaunay graph (and the dual Voronoi diagram) of a set of, possibly intersecting, smooth convex pseudo-circles in the Euclidean plane, given in parametric form. Pseudo-circles are closed curves, every pair of which has at most two intersection points. The Delaunay graph is constructed incrementally. We propose robust and efficient algorithms for all required predicates, analyzing their algebraic complexity, under the exact computation paradigm. We focus on `INCIRCLE`, which is the hardest predicate, and express it by a simple sparse  $5 \times 5$  polynomial system, which allows for an efficient implementation by means of successive Sylvester resultants and a factorization lemma. To speed up the algebraic computations, we study several geometric properties of the problem and provide a subdivision-based algorithm that exhibits quadratic convergence, allowing us to answer the predicate in real-time for the non-degenerate cases. Finally, we present a CGAL-based C++ implementation for the case of ellipses, which is, to the best of our knowledge, the first exact implementation in non-linear computational geometry that deals with algebraic numbers of degree 184. Our code spends 98 sec to construct the Delaunay graph of a set of 128 non-intersecting ellipses, when no degeneracies occur. We show that our specialized methods for ellipses are faster than generic symbolic-numeric software. Moreover, our implementation is faster than the CGAL segment Delaunay graph, when ellipses are approximated by  $k$ -gons for  $k > 15$ , and than the Voronoi diagram of points, when each ellipse is approximated by more than 240 points.

SUBJECT AREA: Computational Geometry

KEYWORDS: Delaunay graph, Voronoi diagram, exact computation, parametric curve, CGAL implementation, geometric predicate, symbolic-numeric computation





*Στον μπαμπά, στη μαμά, στην Έλενα και στη Μαρίνα*



# Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή με τίτλο «Υπολογιστική Γεωμετρία για Καμπύλα Αντικείμενα: Διαγράμματα Voronoi στο Επίπεδο» εκπονήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών με την οικονομική υποστήριξη του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ) το οποίο ευχαριστώ θερμά. Ειδική μνεία αξίζει επίσης και στο ευρωπαϊκό πρόγραμμα ACS - Algorithms for Complex Shapes (IST-006413-2), το οποίο συγχρηματοδότησε το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτον απ' όλους τον επιβλέποντα καθηγητή μου Γιάννη Εμίρη, για την καθοδήγηση, τη βοήθεια και την υποστήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής. Τον ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όλα αυτά τα χρόνια κι ελπίζω να ανταποκριθήκα στις προσδοκίες του.

Ευχαριστώ επίσης τους κκ. καθηγητές Θεοχάρη Θεοχάρη, Παναγιώτη Κακλή, Μενέλαο Καραβέλα, Ηλία Κουτσουπιά, Bernard Mourrain και Λεωνίδα Παληό για την εξαιρετική τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της εφταμελούς επιτροπής. Τον κ. Mourrain τον ευχαριστώ ιδιαίτερα, γιατί με «φιλοξένησε» δύο φορές στην ερευνητική του ομάδα «GALAAD» στο INRIA Sophia-Antipolis, Γαλλία, και το διάστημα που έμεινα εκεί υπήρξε μία ιδιαίτερα παραγωγική περίοδος.

Τις ευχαριστίες μου θα ήθελα να εκφράσω και στον Ηλία Τσιγαρίδα για την αρμονική και γόνιμη συνεργασία μας, τόσο στην αρχή, που ήμασταν στο ίδιο γραφείο, έχοντας τον ίδιο επιβλέποντα καθηγητή, όσο και στη συνέχεια εξ' αποστάσεως. Και μιλώντας για ίδιο γραφείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το Γιώργο, τη Μαρία και τον Ορέστη, με τους οποίους μοιράστηκα επίσης το πρώτο μου γραφείο, και οι οποίοι όλοι μαζί δημιουργούσαν μία πολύ ευχάριστη ατμόσφαιρα. Κι επειδή στο DI «τα πάντα ρει» και άλλαζα συνεχώς γραφεία, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους συναδέλφους που είχα στη συνέχεια, Χρήστο Κ., Χρήστο Σ., Δημήτρη, Ζαφειράκη,

Χρυσίδα, Κάτια, Αγγελίνα, με τους οποίους περνούσαμε μαζί τις περισσότερες ώρες της ημέρας (ίσως και της νύχτας όταν επρόκειτο για « deadline »).

Ένα μεγάλο ευχαριστώ και στους φίλους μου εκτός DI στην Αθήνα, Αργύρη, Τάσο, Χρήστο Τ., Λάμπρο, Χρήστο Κ., Λουκά και Δημήτρη, οι οποίοι φροντίζουν τακτικά να αλλάζω παραστάσεις, ώστε να είμαι πιο δημιουργικός. Γι' αυτό κι εγώ υπόσχομαι ότι θα τους εξηγήσω τι ακριβώς είναι το διάγραμμα Voronoi ελλείψεων που μελετούσα τόσον καιρό!

Η οικογένειά μου με στήριξε τόσο ηθικά, όσο και υλικά στην προσπάθειά μου. Το λιγότερο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω τη διατριβή αυτή.

Γιώργος Τζούμας  
Αθήνα, Σεπτέμβριος 2009

# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>15</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	<b>19</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>21</b>
1.1 Διάγραμμα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων . . . . .	24
1.2 Βασικά αποτελέσματα της διατριβής . . . . .	37
1.3 Οργάνωση της διατριβής . . . . .	40
<b>2 Βασικά κατηγορήματα</b>	<b>41</b>
2.1 Αναπαράσταση . . . . .	41
2.1.1 Κωνικές τομές - Ελλείψεις . . . . .	44
2.2 Απλές κατασκευές . . . . .	47
2.2.1 Εφαπτομένη . . . . .	47
2.2.2 Κάθετος . . . . .	47
2.2.3 Εσωτερικό σημείο . . . . .	47
2.3 Σχετική θέση εστιών . . . . .	48
2.4 Πλευρά της διχοτόμου . . . . .	49
2.4.1 Κωνικές τομές - Ελλείψεις . . . . .	50
2.5 Απόσταση από κοινή εφαπτομένη . . . . .	52
2.5.1 Κωνικές τομές - Ελλείψεις . . . . .	55
2.6 Κύκλος Voronoi τριών ελλείψεων . . . . .	57
<b>3 Κύκλος Voronoi και διένεξη κορυφής</b>	<b>61</b>
3.1 Διεφαπτόμενος κύκλος . . . . .	61
3.1.1 Εύρεση εξωτερικού διεφαπτόμενου κύκλου . . . . .	66
3.1.2 Εύρεση εσωτερικού διεφαπτόμενου κύκλου . . . . .	68

3.2	Τριεφαπτόμενος κύκλος . . . . .	70
3.3	Υπαρξη κύκλου Voronoi . . . . .	73
3.4	Εύρεση κύκλου Voronoi με υποδιαίρεση . . . . .	76
3.4.1	Γενικός αλγόριθμος γραμμικής σύγκλισης . . . . .	76
3.4.2	Αλγόριθμος τετραγωνικής σύγκλισης . . . . .	79
3.4.3	Εφαρμογή στο πρόβλημα του Απολλώνιου . . . . .	87
3.5	Αλγεβρική επίλυση του συστήματος . . . . .	89
3.5.1	Επιλογή της κατάλληλης ρίζας . . . . .	92
3.6	Αποφασίζοντας το InCircle . . . . .	93
3.6.1	Διένεξη με εξωτερικό δίσκο Voronoi . . . . .	95
3.6.2	Διένεξη με εσωτερικό δίσκο Voronoi . . . . .	97
3.6.3	Διάταξη των σημείων επαφής . . . . .	98
3.6.4	Εκφυλισμένες περιπτώσεις . . . . .	99
3.7	Όταν η παράμετρος τείνει στο άπειρο . . . . .	102
3.8	Διένεξη ακμής . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Υλοποίηση και πειραματικά αποτελέσματα</b>	<b>107</b>
4.1	Επιδόσεις . . . . .	110
4.2	Σύγκριση με διάγραμμα Voronoi σημείων . . . . .	113
4.3	Σύγκριση με διάγραμμα Voronoi πολυγώνων . . . . .	115
4.4	Περιορισμός σε κύκλους . . . . .	116
4.5	Πειράματα με γενικές παραμετρικές καμπύλες . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>119</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>125</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Διάγραμμα Voronoi σημείων (συμπαγής γραμμή) και γράφος Delaunay (διακεκομμένη) . . . . .	22
1.2	(α)–(ε): Ψευδοκύκλοι σε γενική θέση. (στ)–(ζ): Ψευδοκύκλοι σε μη γενική θέση. (η)–(ι): Εστίες που δεν αποτελούν σύνολο ψευδοκύκλων . .	26
1.3	Αριστερά: Διχοτόμος καμπύλη δύο τεμνόμενων εστιών. Τα άκρα της καμπύλης εκτείνονται στο άπειρο. Δεξιά: Συμβολισμοί σχετικά με την εστία C . . . . .	28
1.4	Διάγραμμα Voronoi και δυϊκός γράφος Delaunay κυκλικών δίσκων .	28
1.5	Δίσκοι Voronoi με θετική και αρνητική φορά ως προς τα σημεία επαφής	32
1.6	Οι έξι περιπτώσεις για την περιοχή σκίασης (σκούρο γκρι) μίας εστίας C (παχιά μύαρη γραμμή) . . . . .	33
1.7	Διένεξη εστίας C με τον εξωτερικό δίσκο Voronoi (αριστερά) ή με τον εσωτερικό (δεξιά). Οι ακμές Voronoi σημειώνονται με συμπαγή γραμμή, η περιοχή διένεξης με διακεκομμένη . . . . .	33
1.8	Οι τύποι διένεξης ακμής, ως προς την εστία C (παχιά μαύρη γραμμή). Πάνω, κάτω, αριστερά και δεξιά οι εστίες $C_i, C_j, C_l, C_k$ αντίστοιχα . .	34
1.9	Αριστερά: SIDEOFBISECTOR. Δεξιά: DISTANCEFROMBITANGENT . . . . .	36
1.10	Αριστερά: INCIRCLE. Δεξιά: EDGECONFLICTTYPE . . . . .	37
1.11	Αριστερά: Διάγραμμα Voronoi ελλείψεων και δυϊκός γράφος Delaunay. Δεξιά: Διάγραμμα Voronoi και δυϊκός γράφος δύο τεμνόμενων ελλείψεων . . . . .	39
2.1	Η καμπύλη « φασόλι » $t \mapsto \left( \frac{1+t^2}{t^4+t^2+1}, \frac{t(1+t^2)}{t^4+t^2+1} \right)$ . . . . .	42
2.2	Ορισμός της έλλειψης από τους ημιάξονες, το κέντρο και τη στροφή .	45
2.3	Υπολογισμός εσωτερικού σημείου $p$ , καθώς και του SIDEOFBISECTOR για το σημείο $q$ . . . . .	49

2.4	Αριστερά: τέσσερις κάθετοι στην έλλειψη Δεξιά: Η εξειλιγμένη της έλλειψης. . . . .	51
2.5	Υπολογισμός του $DISTANCEFROMBITANGENT$ . . . . .	53
2.6	Οι τέσσερις κοινές εφαπτομένες δύο ελλείψεων, δύο εξωτερικές και δύο εσωτερικές . . . . .	56
3.1	Διάφοροι τριεφαπτόμενοι κύκλοι τριών εστιών ( $C_t, C_r, C_s$ ). Συμπαγής γραμμή: Θετική φορά των σημείων επαφής. Διακεκομμένη γραμμή: Αρνητική φορά . . . . .	62
3.2	Αριστερά: Ορισμός ενός σημείου $q(x, y)$ της διχοτόμου καμπύλης. Δεξιά ένα σημείο $q(x, y)$ το οποίο δεν αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση . . . . .	63
3.3	Συμπαγής γραμμή: Διεφαπτόμενοι κύκλοι και διχοτόμος καμπύλη ελλείψεων. Διακεκομμένη γραμμή: Διεφαπτόμενοι κύκλοι των οποίων τα κέντρα παραβιάζουν το κριτήριο της μικρότερης απόστασης (γραμμή με τελείες), είτε παραβιάζουν το κριτήριο της ίσης απόστασης (γραμμή με παύλες), ωστόσο τα σημεία επαφής ικανοποιούν την αλγεβρική εξίσωση $B(t, r)$ . . . . .	64
3.4	Οι έξι διεφαπτόμενοι κύκλοι: Ο Απολλώνιος κύκλος είναι ο τρίτος από δεξιά . . . . .	65
3.5	Οι διάφορες περιπτώσεις ορισμού του Απολλώνιου κύκλου . . . . .	66
3.6	Ορισμός του απολλώνιου τόξου . . . . .	67
3.7	Μαύρη γραμμή: Εσωτερικός διεφαπτόμενος κύκλος. Γκρι σκούρο: Διεφαπτόμενος κύκλος με ακτίνα μεγαλύτερη της ακτίνας καμπυλότητας (όχι τοπικά εντός). Γκρι ανοιχτό: Διεφαπτόμενος κύκλος με ακτίνα μεγαλύτερη από αυτή του μέγιστου δίσκου (όχι ολικά εντός) . . . . .	69
3.8	Πραγματικές λύσεις του συστήματος (3.2) . . . . .	70
3.9	Πραγματικές λύσεις του συστήματος (3.3) . . . . .	72
3.10	Εξωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος . . . . .	73
3.11	Πάνω: $\kappa < 2$ . Κάτω: $\kappa \geq 2$ . Αριστερά: $C_t \cap C_r = \emptyset$ . Δεξιά $C_t \cap C_r \neq \emptyset$ . . . . .	75
3.12	Ενδεικτική γραφική παράσταση της $\delta_{tr}^2(t)$ . Αριστερή έλλειψη με παράμετρο $t$ , δεξιά με παράμετρο $r$ . Πάνω: $t \in (-0.6, 0.5)$ . Κάτω: $t \in (-\infty, -2) \cup (1.5, +\infty)$ . . . . .	77
3.13	Η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη . . . . .	78



3.14	Αριστερά: Δύο εστίες με θετική φορά. Δεξιά: $t' > t \implies r' < r$ . . . . .	80
3.15	Αριστερά: Όλοι οι διεφαπτόμενοι κύκλοι για κάθε ζεύγος. Δεξιά: Το $t_2$ , όταν υπολογίζεται απ' το $t_1$ , περικλείει το $\hat{t}$ . . . . .	82
3.16	Αλγόριθμος υποδιαίρεσης . . . . .	83
3.17	Αριστερά: $\hat{y} \in [y_1, y_2]$ ; Μέση: οπισθοδρόμηση; Δεξιά: κανονικοποιημένα διαστήματα . . . . .	85
3.18	Αλγόριθμος κανονικοποίησης διαστημάτων . . . . .	86
3.19	Το πρόβλημα του Απολλώνιου . . . . .	88
3.20	Εσωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος . . . . .	93
3.21	Εφαπτόμενοι κύκλοι σε μία εστία, από την ίδια πλευρά της κοινής τους εφαπτομένης . . . . .	94
3.22	Λήμμα 3.6.5: διένεξη $C_h$ με εξωτερικό δίσκο Voronoi . . . . .	96
3.23	Λήμμα 3.6.6: διένεξη εστίας $C_h$ με εσωτερικό δίσκο Voronoi. Οι ακμές Voronoi δίνονται με συμπαγή γραμμή, η περιοχή διένεξης με διακεκομμένη . . . . .	97
3.24	Αριστερά: $S_{tr}(C_h) = \emptyset$ . Δεξιά: $S_{tr}(C_h) = (0, a)$ και η $C_h$ βρίσκεται σε διένεξη με τον $V_{tr_s}$ . . . . .	98
3.25	Εκφυλισμένη περίπτωση για εξωτερικό (αριστερά) και για εσωτερικό (δεξιά) κύκλο Voronoi . . . . .	100
3.26	Το εσωτερικό του ΚΠ δύο ελλείψεων δεν μπορεί να περιέχει όλα τα άκρα των μεγάλων αξόνων . . . . .	103
3.27	Η παραμετροποίηση της έλλειψης εμπεριέχει τη συμμετρία . . . . .	103
4.1	Διάγραμμα Voronoi 16 ελλείψεων . . . . .	108
4.2	Χρόνος εκτέλεσης για τα κατηγορήματα SIDEOFBISECTOR (+), DISTANCEFROMBITANGENT ( $\times$ ) και INCIRCLE (*), καθώς το δυαδικό μήκος εισόδου αυξάνεται . . . . .	110
4.3	Χρόνος εκτέλεσης για τον υπολογισμό της απαλοίφουσας, καθώς το δυαδικό μήκος εισόδου αυξάνεται . . . . .	111
4.4	Χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου υποδιαίρεσης, καθώς η ζητούμενη ακρίβεια αυξάνεται . . . . .	111
4.5	Γράφος Delaunay πολυγώνων και ελλείψεων . . . . .	112
4.6	Διάγραμμα Voronoi 16 20-γώνων που προσεγγίζουν κάθε έλλειψη (320 ευθ. τμήματα συνολικά) . . . . .	113

4.7	Γράφος Delaunay 32 ελλείψεων εναντίον σημειακών προσεγγίσεων με αυξανόμενο αριθμό σημείων ανά έλλειψη . . . . .	114
4.8	Γράφος Delaunay 32 πολυγώνων με αυξανόμενο αριθμό ακμών . . .	115

# Κατάλογος Πινάκων

3.1	Υπολογισμός της περιοχής σκίασης . . . . .	99
3.2	Υπολογισμός του EDGECONFLICTTYPE μέσω της περιοχής σκίασης . . .	105
3.3	Υπολογισμός του EDGECONFLICTTYPE μέσω του INCIRCLE . . . . .	105
4.1	Βαθμός απαλοίφουσας για διάφορες καμπύλες . . . . .	117



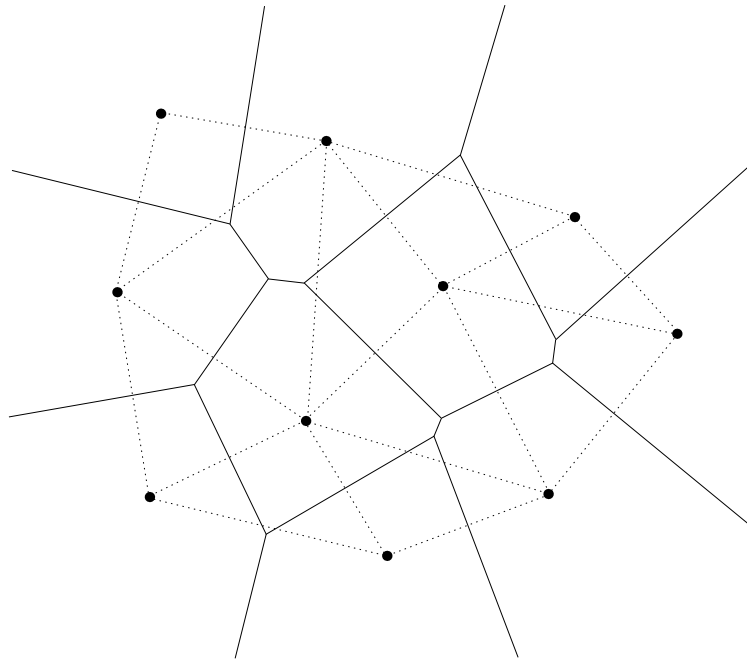
# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τα διαγράμματα Voronoi είναι γεωμετρικές κατασκευές που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον [1]. Διαθέτουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών που περιλαμβάνει σχεδιασμό κίνησης ρομπότ ανάμεσα από εμπόδια, ανίχνευση συγκρούσεων, αναγνώριση προτύπων και κρυσταλλογραφία. Ένας άλλος λόγος για τον οποίο ο υπολογισμός του διαγράμματος Voronoi είναι σημαντικός, είναι η στενή του σχέση με τον υπολογισμό του μέσου άξονα ενός αντικειμένου [2].

Έστω ένα σύνολο σημείων  $p_i$  στο επίπεδο τα οποία ονομάζουμε *εστίες (sites)*. Ως *κελί (ή περιοχή) Voronoi* μίας εστίας ορίζουμε τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται κοντινότερα στην εστία αυτή παρά σε οποιαδήποτε άλλη. Το σύνορο των κελιών Voronoi των εστιών αποτελεί το *διάγραμμα Voronoi* των εστιών (βλ. σχήμα 1.1). Παρατηρείστε ότι οι ακμές του διαγράμματος είναι τμήματα της μεσοκαθέτου των εστιών των δύο προσκείμενων κελιών. Έστω  $\mathcal{C}$  ένα σύνολο εστιών. Με  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  συμβολίζουμε το αντίστοιχο διάγραμμα Voronoi. Κατασκευάζουμε το δυϊκό διάγραμμα  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  ως εξής: σε κάθε κελί του  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  αντιστοιχεί μία κορυφή του  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  (που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με την εστία του κελιού) και δύο κορυφές του  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  συνδέονται με ακμή, αν και μόνο αν τα αντίστοιχα κελιά Voronoi έχουν κοινή ακμή. Το  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  ονομάζεται γράφος Delaunay του συνόλου εστιών  $\mathcal{C}$  (σχήμα 1.1). Παρατηρείστε ότι κάθε κορυφή Voronoi (σημείο τομής τουλάχιστον τριών ακμών) αντιστοιχεί σε μία (τουλάχιστον τριγωνική) έδρα του  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Όταν όλες οι έδρες του  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  είναι τριγωνικές, τότε ο γράφος Delaunay ονομάζεται *τριγωνοποίηση Delaunay (Delaunay triangulation)*.

Ο υπολογισμός του διαγράμματος Voronoi ενός συνόλου εστιών και του δυϊκού γράφου Delaunay έχει μελετηθεί εκτενώς. Οι εστίες μπορούν να είναι σημεία είτε ευθύγραμμα τμήματα [3], τα οποία μάλιστα μπορεί και να τέμνονται [4]. Στην [5]



**Σχήμα 1.1:** Διάγραμμα Voronoi σημείων (συμπαγής γραμμή) και γράφος Delaunay (διακεκομμένη)

υπολογίζεται το διάγραμμα Voronoi κυρτών πολυγώνων. Οι συγγραφείς εκμεταλλεύονται κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες «ιχνηλατώντας» το περίβλημα των εστιών και παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο τύπου «γραμμής σάρωσης», καθώς και έναν αυξητικό αλγόριθμο.

Το διάγραμμα Voronoi έχει επίσης μελετηθεί και στην περίπτωση εστιών του επιπέδου με καμπύλο περίβλημα. Στις [6, 7], μελετώνται τοπολογικές ιδιότητες του διαγράμματος καθώς και ο τύπος των διχοτόμων καμπυλών, αν και τα κατηγορήματα καθώς και η υλοποίησή τους δεν εξετάζονται. Στην [8] μελετάται θεωρητικά η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα ενός κελιού Voronoi σφαιρών σε γενική διάσταση, παρέχονται κάποιες συνδυαστικές ιδιότητες ενός τέτοιου διαγράμματος και δίνεται ένας αλγόριθμος υπολογισμού ενός κελιού του διαγράμματος. Στην [9] οι συγγραφείς δίνουν έναν ασυμπτωτικά βέλτιστο αλγόριθμο για την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi μη τεμνόμενων κυρτών εστιών στον  $\mathbb{R}^3$ , ωστόσο τα κατηγορήματα δε μελετώνται. Η [10] περιγράφει έναν δυναμικό αλγόριθμο για την κατασκευή του διαγράμματος Voronoi προσθετικά βεβαρυμένων σημείων (σφαιρών) στον  $\mathbb{R}^d$ . Υπάρχουν επίσης προσπάθειες που υπολογίζουν το διάγραμμα Voronoi, αλλά μόνο προσεγγιστικά· «ιχνηλατώντας» τις διχοτόμους με ακρίβεια αριθμητικής της μηχαν-

νής (κινητής υποδιαστολής) για τον υπολογισμό ενός κελιού Voronoi ενός συνόλου ρητών  $C^1$ -συνεχών παραμετρικών κλειστών καμπυλών [11], ακολουθώντας το σύνορο των εστιών με μια προκαθορισμένη ακρίβεια [12], με προσεγγίσεις μικρού βαθμού των διχοτόμων των καμπύλων εστιών [13], είτε με προσεγγίσεις μετατοπίσεων φραγμένου σφάλματος καμπυλών NURBS στην περίπτωση μη τεμνόμενων καμπυλών [14]. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις [15, 16] για το διάγραμμα Voronoi κύκλων, το οποίο διατηρεί τοπολογική συνέπεια, όχι όμως και γεωμετρική ακρίβεια. Υπάρχει επίσης η πολύ αποτελεσματική υλοποίηση της [3], η οποία όμως βασίζεται σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής. Για μια πιο πρόσφατη υλοποίηση που χειρίζεται (μη τεμνόμενα) ευθύγραμμα τμήματα και κυκλικά τόξα παραπέμπουμε στην [17].

Οι διχοτόμοι παραμετρικών καμπυλών χρησιμοποιούνται επίσης σε υπολογισμούς του μέσου άξονα. Για παράδειγμα στην [18] εξετάζονται γεωμετρικές ιδιότητες αυτών των διχοτόμων με σκοπό να προσεγγιστούν αποτελεσματικά από απλούστερες καμπύλες. Στην [19] υπολογίζεται ο μέσος άξονας μιας απλά συνδεδεμένης επίπεδης περιοχής της οποίας το σύνορο δίνεται ως καμπύλη spline χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο τύπου « διαίρει και βασίλευε ». Το σύνορο της περιοχής προσεγγίζεται με arc-splines και στη συνέχεια, ο σωστός μέσος άξονας υπολογίζεται μέχρι μια προκαθορισμένη ακρίβεια. Τέλος, στην [20] παρουσιάζεται ένας ακριβής αλγόριθμος υποδιαίρεσης για την τομή καμπυλών Bézier.

Ένα άλλο κομμάτι της έρευνας εστιάζει στην προσέγγιση εστιών από πολύγωνα [21]. Στην [22] υπολογίζεται μια πολυγωνική προσέγγιση ενός διαγράμματος Voronoi με διάφορους βαθμούς λεπτομέρειας. Ωστόσο, η προσέγγιση καμπύλων αντικειμένων με (μη ομαλά) ευθύγραμμα τμήματα ή κυκλικά τόξα ενδέχεται να δημιουργήσει τεχνητές ακμές στο διάγραμμα Voronoi, οι οποίες δεν αποτελούν μέρος του αρχικού διαγράμματος. Έτσι, είναι απαραίτητη η αφαίρεση αυτών των πλεονάζουσων ακμών μετά το πέρας του αλγορίθμου. Ακόμη, είναι δυνατό να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα σε ό,τι αφορά την τοπολογία του διαγράμματος, όπως εξηγείται στην [6]. Εκτός αυτού, μόνο η υλοποίηση της [4] παράγει ακριβή έξοδο, ανάμεσα στις προαναφερθείσες μεθόδους.

Λίγες εργασίες έχουν μελετήσει τα *ακριβή* διαγράμματα Voronoi καμπύλων αντικειμένων. Τέτοια διαγράμματα μπορεί να είναι κρίσιμα σε εφαρμογές όπως συναρμολόγηση, ανακατασκευή επιφανειών και κρυσταλλογραφία [23]. Στην [23] επίσης εξετάστηκαν οι κωνικές τομές, όμως μόνο σε θεωρητικό πλαίσιο. Επίσης, οι αλγε-

βρικές συνθήκες που προέκυψαν δεν ήταν βέλτιστες με αποτέλεσμα να οδηγούν σε απαγορευτικά υψηλή αλγεβρική πολυπλοκότητα. Οι προτεινόμενες μέθοδοι βασίζονται σε υπολογισμούς ιδιοδιανυσμάτων και δεν είναι ακριβείς (υπό το πλαίσιο της ακριβούς αριθμητικής).

Στην περίπτωση κύκλων, η ακριβής και αποτελεσματική υλοποίηση της [24] αποτελεί πλέον μέρος της CGAL [25]. Στην [26] χρησιμοποιείται ακριβής αριθμητική για τον υπολογισμό διατάξεων καμπύλων και επιφανειών. Οι προτεινόμενες μέθοδοι είναι βελτιστοποιημένες για αλγεβρικές πράξεις μικρού βαθμού και δεν μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας στον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi, όπου απαιτείται όπως θα δούμε χειρισμός αλγεβρικών αριθμών βαθμού 184 στην περίπτωση ελλείψεων. Μία πιο πρόσφατη υλοποίηση [27] αφορά τον ακριβή υπολογισμό διατάξεων καμπυλών Bézier οποιουδήποτε βαθμού. Οι συγγραφείς συνδυάζουν αλγεβρικές και γεωμετρικές τεχνικές ώστε να καταλήξουν σε μία αποτελεσματική υλοποίηση για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Αν και το διάγραμμα Voronoi απαιτεί πιο πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς, η προσέγγισή μας είναι παρόμοια. Θα χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τεχνικές σε συνδυασμό με γεωμετρικά και αριθμητικά φίλτρα, ώστε να οδηγηθούμε σε μία αποτελεσματική υλοποίηση. Να σημειώσουμε εδώ ότι το διάγραμμα Voronoi δεν μπορεί να αναπαρασταθεί « ακριβώς », καθώς περιλαμβάνει αλγεβρικούς αριθμούς, αν και οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε επιτρέπουν την προσέγγιση αυτών των αριθμών με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια, η οποία δε χρειάζεται να είναι προκαθορισμένη εξαρχής. Από την άλλη, ο δυϊκός γράφος Delaunay μπορεί να αναπαρασταθεί ακριβώς, μιας και πρόκειται για μια διακριτή συνδυαστική δομή δεδομένων. Έτσι, στην υλοποίησή μας αναπαριστούμε το διάγραμμα Voronoi μέσω του δυϊκού γράφου Delaunay.

## 1.1 Διάγραμμα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων

Σε αυτή τη διατριβή θα μελετήσουμε τα κατηγορήματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του διαγράμματος Voronoi *κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων*. Αυτός ο τύπος διαγράμματος Voronoi έχει μελετηθεί στην [28] (ως επέκταση της [29]), όπου δείχνεται ότι το διάγραμμα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων είναι ένα *αφηρημέ-*



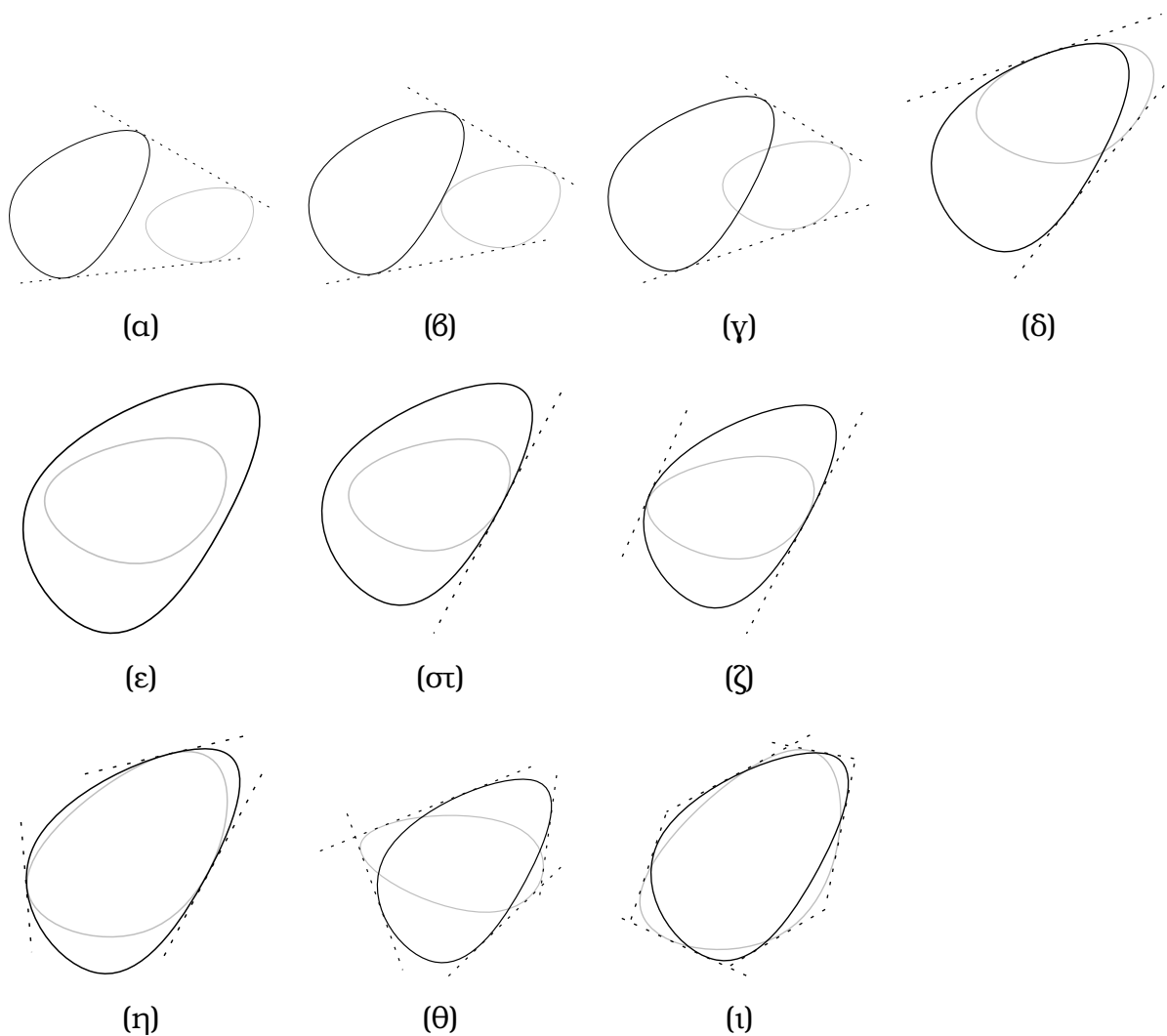
νο διάγραμμα Voronoi (*abstract Voronoi diagram*) [30] και παρέχεται ένας αυξητικός αλγόριθμος υπολογισμού του, ο οποίος βασίζεται σε ορισμένα γεωμετρικά κατηγορήματα. Θα μελετήσουμε την αλγεβρική πολυπλοκότητα των κατηγορημάτων αυτών και θα δώσουμε έναν τρόπο υπολογισμού τους, ο οποίος θα μας οδηγήσει σε μια αποτελεσματική υλοποίηση, πάντα υπό το πρίσμα της ακριβούς αριθμητικής [31]. Στη συνέχεια ακολουθεί μία εισαγωγή στα διαγράμματα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων όπου για λόγους συμβατότητας και συνέπειας θα χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους ορισμούς και συμβολισμούς με της [28].

Ένα σύνολο *ψευδοκύκλων* (*pseudo-circles*) είναι ένα σύνολο κυρτών και φραγμένων αντικειμένων, τέτοιο ώστε τα σύνορα των εστιών οποιουδήποτε ζεύγους του συνόλου να έχουν το πολύ δύο σημεία τομής (βλ. σχήμα 1.2).

Οι εστίες, των οποίων το διάγραμμα Voronoi θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι ένα σύνολο ψευδοκύκλων, όπου το σύνορο εστιών αποτελείται από μία κυρτή ομαλή κλειστή καμπύλη. Η ομαλότητα επιτρέπει τον ορισμό της εφαπτομένης σε κάθε σημείο του συνόρου της εστίας. Από δω και στο εξής θα συμβολίζουμε με  $C$  μία κυρτή ομαλή κλειστή καμπύλη (βλ. σχήμα 1.3 δεξιά). Με  $C^\circ$  συμβολίζουμε την ανοιχτή περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από τη  $C$ , ενώ  $C$  είναι μια κυρτή ομαλή εστία, έτσι ώστε αν  $q$  είναι ένα σημείο του επιπέδου,  $q \in C \iff q \in C \cup C^\circ$ . Προσέξτε ότι με τους παραπάνω συμβολισμούς, το  $C \equiv \partial C$  συμβολίζει το σύνορο της εστίας, ενώ το  $C$  περιλαμβάνει τόσο το σύνορο της εστίας, όσο και τα σημεία που βρίσκονται εσωτερικά του συνόρου.

Έστω δύο εστίες  $C_1, C_2$  και μία ευθεία  $\varepsilon$ . Η  $\varepsilon$  αποτελεί *κοινή εξωτερική εφαπτομένη* των  $C_1$  και  $C_2$ , αν η  $\varepsilon$  εφάπτεται τόσο στη  $C_1$ , όσο και στη  $C_2$  και επιπλέον, οι εστίες αυτές περιέχονται στο ίδιο (κλειστό) ημιεπίπεδο που ορίζει η  $\varepsilon$ . Αντίστοιχα, η  $\varepsilon$  αποτελεί *κοινή εσωτερική εφαπτομένη* των  $C_1$  και  $C_2$ , όταν εφάπτεται στα σύνορα αυτών, αφήνοντάς τες σε *διαφορετικό* ημιεπίπεδο. Δύο εστίες  $C_1$  και  $C_2$  λέμε ότι *εφάπτονται εξωτερικά* αν τα σύνορά τους έχουν μόνο ένα κοινό σημείο και η εφαπτομένη των εστιών σε εκείνο το σημείο είναι κοινή εσωτερική εφαπτομένη. Αντίστοιχα, δύο εστίες  $C_1$  και  $C_2$  λέμε ότι *εφάπτονται εσωτερικά* αν η μία περιέχεται εξ ολοκλήρου στην άλλη και τα σύνορά τους έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Τα σύνολα ψευδοκύκλων της εισόδου έχουν τις εξής ιδιότητες (βλ. σχήμα 1.2):  
 i) Κάθε ζεύγος εστιών έχει το πολύ δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες (περιπτώσεις (α)–(ζ) του σχήματος). ii) Δύο εστίες δεν έχουν κοινή εξωτερική εφαπτομένη αν η μία περιέχεται στο εσωτερικό της άλλης (περίπτωση (ε)). iii) Δύο εστίες (που δεν ανήκουν



**Σχήμα 1.2:** (α)-(ε): Ψευδοκύκλοι σε γενική θέση. (στ)-(ζ): Ψευδοκύκλοι σε μη γενική θέση. (η)-(ι): Εστίες που δεν αποτελούν σύνολο ψευδοκύκλων

στην περίπτωση (ε)) έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες αν τα σύνορά τους δεν τέμνονται (περίπτωση (α)), είτε αν εφάπτονται εξωτερικά (περίπτωση (β)), είτε αν τα σύνορά τους έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία και διασταυρώνονται σε καθένα απ' αυτά (περιπτώσεις (γ) και (δ)), παρατηρείστε ότι στην περίπτωση (δ) οι εφαπτομένες των εστιών στο ένα από τα δύο σημεία τομής των συνόρων τους ταυτίζονται). iv) Δύο εστίες που αποτελούν σύνολο ψευδοκύκλων μπορεί να εφάπτονται και εσωτερικά (περιπτώσεις (στ) και (ζ)). Σε αυτή την περίπτωση έχουν μία ή δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες.

Ένα σύνολο ψευδοκύκλων λέμε ότι βρίσκεται σε *γενική θέση*, όταν δεν υπάρχουν εσωτερικά εφαπτόμενες εστίες (σχήμα 1.2, περιπτώσεις (α)–(ε)). Από δω και στο εξής θα θεωρούμε ότι η είσοδός μας είναι ένα σύνολο ψευδοκύκλων σε γενική θέση.

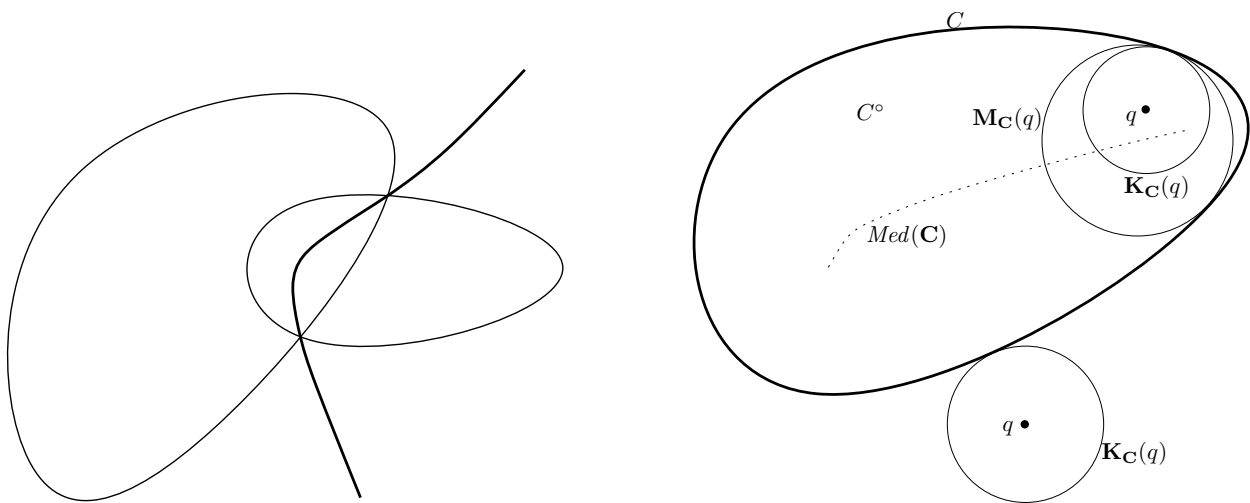
**Ορισμός 1.1.1** Δοθέντων μιας εστίας  $C$  και ενός σημείου  $q$ , η απόσταση  $\delta(q, C)$  του  $q$  από τη  $C$  ορίζεται ως:

$$\delta(q, C) = \begin{cases} \min_{x \in C} \|q - x\|, & q \notin C \\ -\min_{x \in C} \|q - x\|, & q \in C \end{cases}$$

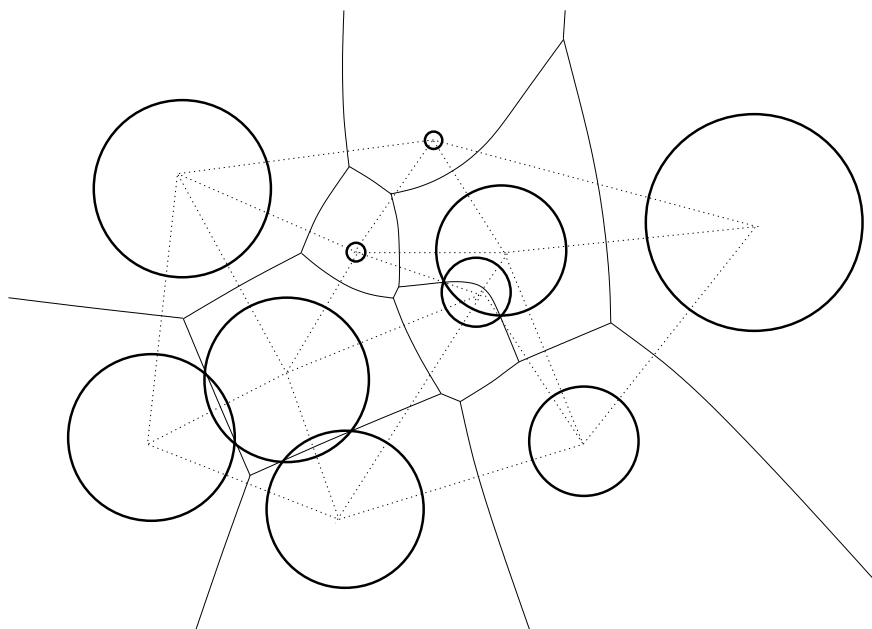
όπου  $\|\cdot\|$  η Ευκλείδεια μετρική.

Έστω τώρα ένα σύνολο εστιών  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ , το *διάγραμμα Voronoi*  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  είναι μία υποδιαίρεση του επιπέδου σε κελιά, ακμές και κορυφές, η οποία ορίζεται ως εξής (βλ. σχήμα 1.4): Το *κελί Voronoi* μίας εστίας  $C_i$ , το οποίο συμβολίζουμε με  $V(C_i)$ , αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται πλησιέστερα σε αυτή παρά σε οποιαδήποτε άλλη εστία του συνόλου  $\mathcal{C}$ . Οι *ακμές Voronoi* είναι τα μέγιστα συνεκτικά σύνολα σημείων που ισαπέχουν από δύο εστίες του συνόλου  $\mathcal{C}$  και τα οποία βρίσκονται πλησιέστερα σε αυτές παρά σε οποιαδήποτε άλλη. Οι *κορυφές Voronoi* είναι σημεία που ισαπέχουν από τουλάχιστον τρεις εστίες του  $\mathcal{C}$  και βρίσκονται πλησιέστερα σε αυτές παρά σε οποιαδήποτε άλλη εστία του  $\mathcal{C}$ . Το σύνορο και το εσωτερικό του κελιού Voronoi της εστίας  $C_i$  θα τα συμβολίζουμε αντίστοιχα με  $\partial V(C_i)$  και  $V^\circ(C_i)$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες των μέγιστων κυκλικών δίσκων που περιέχονται σε μία εστία  $C$  είτε που δεν τέμνουν το  $C^\circ$  (σχήμα 1.3 δεξιά). Για οποιοδήποτε σημείο  $q$ , συμβολίζουμε με  $K_C(q)$  τον κλειστό δίσκο με κέντρο το  $q$  και ακτίνα  $|\delta(q, C)|$ . Αν  $q \notin C$ , τότε το  $K_C(q)$  είναι ο μέγιστος δίσκος με κέντρο το  $q$  που δεν τέμνει το  $C^\circ$ . Αντίθετα, αν  $q \in C$ , τότε το  $K_C(q)$  είναι ο μέγιστος δίσκος με κέντρο το  $q$  ο οποίος



**Σχήμα 1.3:** Αριστερά: Διχτομός καμπύλη δύο τεμνόμενων εστιών. Τα άκρα της καμπύλης εκτείνονται στο άπειρο. Δεξιά: Συμβολισμοί σχετικά με την εστία  $C$



**Σχήμα 1.4:** Διάγραμμα Νοροποι και δυϊκός γράφος Delaunay κυκλικών δίσκων

περιέχεται στην  $C$ . Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει και ένας μοναδικός μέγιστος δίσκος ο οποίος περιέχει τον  $K_C(q)$  και ο οποίος περιέχεται στην  $C$  τον οποίο συμβολίζουμε με  $M_C(q)$ . Ο μέσος άξονας  $\text{Med}(C)$  της  $C$  ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων μέγιστων δίσκων  $M_C(q)$ ,  $\forall q \in C$ . Τέλος, αν στο συμβολισμό μιας εστίας περιλαμβάνεται και κάποιος δείκτης (π.χ.  $C_i$ ), αντί για  $K_{C_i}$  και  $M_{C_i}$  γράφουμε απλά  $K_i$  και  $M_i$  αντίστοιχα.

Από τον ορισμό 1.1.1 της απόστασης προκύπτει το επόμενο λήμμα:

**Λήμμα 1.1.2 ([28])** Έστω δύο εστίες  $C_i$  και  $C_j$ .

1. Αν  $q \in C_i$ , τότε  $\delta(q, C_i) < \delta(q, C_j)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν περιέχεται στην  $C_j$  και  $\delta(q, C_i) = \delta(q, C_j)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  εφάπτεται εσωτερικά στην  $C_j$ .
2. Αν  $q \notin C_i$ , τότε  $\delta(q, C_i) < \delta(q, C_j)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν τέμνει την  $C_j$  και  $\delta(q, C_i) = \delta(q, C_j)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  εφάπτεται εξωτερικά στην  $C_j$ .

Η διχοτόμος καμπύλη (*bisector*) δύο εστιών  $C_i$  και  $C_j$  είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις δύο εστίες, δηλαδή τα σημεία  $q$  για τα οποία ισχύει  $\delta(q, C_i) = \delta(q, C_j)$  (βλ. σχήμα 1.3 αριστερά). Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι η εξής ιδιότητα: Κάθε σημείο  $q$  της διχοτόμου καμπύλης δύο εστιών  $C_i$  και  $C_j$  αποτελεί κέντρο ενός κύκλου που εφάπτεται στις εστίες ακτίνας ίσης με την απόσταση του  $q$  από τις εστίες, που σημαίνει ότι  $K_i(q) \equiv K_j(q)$ . Ονομάζουμε αυτόν τον (εξωτερικό ή εσωτερικό) διεφαπτόμενο κύκλο *Απολλώνιο* κύκλο των δύο εστιών. Προσέξτε ότι εξαιτίας του αρνητικού προσήμου στον ορισμό 1.1.1, τα σημεία της διχοτόμου καμπύλης βρίσκονται είτε εκτός και των δύο εστιών, είτε στην τομή τους, και αυτός ο ορισμός μας επιτρέπει να δείξουμε ότι το διάγραμμα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων είναι ένα αφηρημένο διάγραμμα Voronoi [28]. Το θεώρημα που ακολουθεί περιγράφει την τοπολογία της διχοτόμου καμπύλης.

**Θεώρημα 1.1.3 ([28])** Έστω δύο εστίες  $C_i$  και  $C_j$  που αποτελούν σύνολο ψευδοκύκλων σε γενική θέση. Έστω  $\pi_{ij}$  η διχοτόμος καμπύλη των δύο εστιών. Τότε

1. Αν οι  $C_i, C_j$  δεν έχουν κοινή εξωτερική εφαπτομένη, τότε  $\pi_{ij} = \emptyset$ .
2. Αν οι  $C_i, C_j$  έχουν 2 κοινές εξωτερικές εφαπτομένες, τότε το  $\pi_{ij}$  είναι μία μοναδική καμπύλη ομοιομορφική με το ανοιχτό διάστημα  $(0, 1)$ .

Στο συμβολισμό  $\pi_{ij}$  ορίζουμε έναν προσανατολισμό για τη διχοτόμο, έτσι ώστε καθώς κινούμαστε πάνω στην  $\pi_{ij}$  η  $C_i$  να βρίσκεται στα αριστερά. Το ακόλουθο λήμμα περιγράφει πότε ένα σημείο  $q$  ανήκει στο κελί Voronoi μίας εστίας.

**Λήμμα 1.1.4 ([28])** Έστω ένα σύνολο ψευδοκύκλων  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ .

1. Αν το σημείο  $q \in C_i$ , τότε το  $q$  ανήκει στο κελί Voronoi  $V(C_i)$  της εστίας  $C_i$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν περιέχεται στο εσωτερικό  $C_j^\circ$  καμίας εστίας  $C_j \in \mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ .
2. Αν το σημείο  $q \in C_i$ , τότε το  $q$  ανήκει στο  $V^\circ(C_i)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν περιέχεται σε καμία εστία  $C_j \in \mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ .
3. Αν το σημείο  $q \notin C_i$ , τότε το  $q$  ανήκει στο κελί Voronoi  $V(C_i)$  της εστίας  $C_i$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν τέμνει το εσωτερικό  $C_j^\circ$  καμίας εστίας  $C_j \in \mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ .
4. Αν το σημείο  $q \in C_i$ , τότε το  $q$  ανήκει στο  $V^\circ(C_i)$  αν και μόνο αν ο  $K_i(q)$  δεν τέμνει καμία εστία  $C_j \in \mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ .

Επίσης, ενδέχεται το κελί Voronoi μίας εστίας να είναι κενό:

**Θεώρημα 1.1.5 ([28])** Έστω ένα σύνολο ψευδοκύκλων  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  σε γενική θέση. Για κάθε εστία  $C_i$ , έστω  $N(C_i)$  ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων μέγιστων δίσκων που περιέχονται στη  $C_i$  και οι οποίοι δεν περιέχονται στο εσωτερικό οποιασδήποτε εστίας του  $\mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ . Έστω αντίστοιχα  $N^\circ(C_i)$  ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων μέγιστων δίσκων που περιέχονται στη  $C_i$  και οι οποίοι δεν περιέχονται σε οποιαδήποτε εστία του  $\mathcal{C} \setminus \{C_i\}$ . Τότε

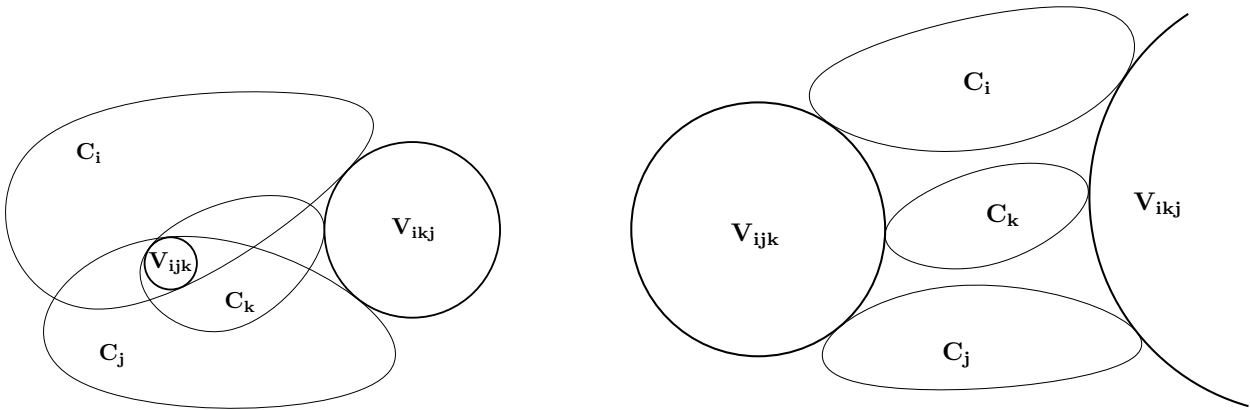
1.  $N(C_i) = \text{Med}(C_i) \cap V(C_i)$  και  $N^\circ(C_i) = \text{Med}(C_i) \cap V^\circ(C_i)$ .
2. Τα  $N(C_i)$  και  $N^\circ(C_i)$  είναι απλά συνεκτικά σύνολα.
3. Το κελί Voronoi  $V(C_i)$  είναι ασθενώς αστροειδές ως προς το  $N(C_i)$  που σημαίνει ότι οποιοδήποτε σημείο του  $V(C_i)$  μπορεί να ενωθεί με ένα σημείο στο  $N(C_i)$ , με ένα τμήμα που περιέχεται στο  $V(C_i)$ . Ομοίως, το  $V^\circ(C_i)$  είναι ασθενώς αστροειδές ως προς το  $N^\circ(C_i)$ .
4.  $V(C_i) = \emptyset$  αν και μόνο αν  $N(C_i) = \emptyset$  και  $V^\circ(C_i) = \emptyset$  αν και μόνο αν  $N^\circ(C_i) = \emptyset$ .

Μια εστία  $C$  λέμε ότι είναι *κρυφή* όταν  $N^\circ(C) = \emptyset$ . Η διαδικασία με την οποία εξετάζουμε αν  $N(C) = \emptyset$  ονομάζεται *εντοπισμός μέσου άξονα* [28].

Ονομάζουμε *σκελετό* του διαγράμματος Voronoi την ένωση όλων των κορυφών και ακμών του. Ο σκελετός ενός διαγράμματος Voronoi ψευδοκύκλων μπορεί να αποτελείται από περισσότερα του ενός συνεκτικά τμήματα. Ωστόσο, μπορούμε να ορίσουμε μία συνεκτική εκδοχή του διαγράμματος προσθέτοντας μία εστία  $C_\infty$  που ονομάζεται «εστία στο άπειρο». Η διχοτόμος καμπύλη της εστίας αυτής και μιας οποιασδήποτε άλλης εστίας είναι μία κλειστή καμπύλη στο άπειρο η οποία τέμνει κάθε μη φραγμένη ακμή του αρχικού διαγράμματος Voronoi. Στη συνέχεια θα θεωρούμε τη συνεκτική εκδοχή του διαγράμματος της οποίας ο σκελετός είναι συνδεδεμένος.

Κάθε σημείο  $q$  μιας ακμής Voronoi που πρόσκειται σε δύο κελιά  $V(C_i)$  και  $V(C_j)$  είναι κέντρο κυκλικού δίσκου  $K_{ij}(q)$  που εφάπτεται στα σύνορα  $C_i$  και  $C_j$  των εστιών. Ο δίσκος αυτός ονομάζεται *εσωτερικός διεφαπτόμενος δίσκος Voronoi*, αν περιέχεται στο  $C_i \cap C_j$  και *εξωτερικός διεφαπτόμενος δίσκος Voronoi*, αν βρίσκεται στο συμπλήρωμα του  $C_i^\circ \cup C_j^\circ$ . Ομοίως, μια κορυφή Voronoi που ανήκει στα κελιά  $V(C_i)$ ,  $V(C_j)$  και  $V(C_k)$  αποτελεί κέντρο δίσκου  $K_{ijk}$  που εφάπτεται στα σύνορα των  $C_i$ ,  $C_j$  και  $C_k$ . Ένας τέτοιος δίσκος ονομάζεται *εσωτερικός τριεφαπτόμενος δίσκος Voronoi*, αν περιέχεται στο  $C_i \cap C_j \cap C_k$  και *εξωτερικός τριεφαπτόμενος δίσκος Voronoi*, αν βρίσκεται στο συμπλήρωμα του  $C_i^\circ \cup C_j^\circ \cup C_k^\circ$ . Δοθισών των εστιών  $C_i$ ,  $C_j$ ,  $C_k$  με αυτή τη σειρά, συμβολίζουμε το δίσκο Voronoi που αντιστοιχεί σε αυτές με  $V_{ijk}$  όταν τα σημεία επαφής του δίσκου με τις εστίες έχουν θετική (CCW) φορά. Με  $V_{ijk}$  αναφερόμαστε στο σύνορο του δίσκου Voronoi, δηλαδή στον κύκλο Voronoi, και με  $V_{ijk}^\circ$  αναφερόμαστε στον ανοιχτό δίσκο Voronoi, δηλαδή στην ανοιχτή περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από τον  $V_{ijk}$ . Επειδή το διάγραμμα Voronoi κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων είναι ένα αφηρημένο διάγραμμα Voronoi, δοθισών τριών εστιών, μπορεί να υπάρχει το πολύ ένας δίσκος Voronoi με θετική φορά και το πολύ ένας δίσκος Voronoi με αρνητική (βλ. σχήμα 1.5). Στη συνέχεια, όταν δεν αναφερόμαστε σε πράξεις συνόλων, αντί για τον όρο «τριεφαπτόμενος δίσκος Voronoi» θα λέμε απλά «κύκλος Voronoi».

Έστω τώρα ότι θέλουμε να προσθέσουμε μία νέα εστία  $C$ , η οποία δεν ανήκει στο αρχικό σύνολο εστιών  $\mathcal{C}$ , και να ενημερώσουμε το διάγραμμα Voronoi  $V(\mathcal{C})$  ώστε να προκύψει το  $V(\mathcal{C}^+)$ , όπου  $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cup \{C\}$ . Υποθέτουμε ότι το  $\mathcal{C}^+$  αποτελεί επίσης σύνολο ψευδοκύκλων.



**Σχήμα 1.5:** Δίσκοι Voronoi με θετική και αρνητική φορά ως προς τα σημεία επαφής

**Ορισμός 1.1.6 (Διένεξη)** Η νέα εστία  $C$  λέμε ότι βρίσκεται σε διένεξη με ένα σημείο  $q$  του σκελετού του τρέχοντος διαγράμματος Voronoi, αν ο δίσκος Voronoi που αντιστοιχεί στο  $q$  είναι είτε ένας εσωτερικός δίσκος Voronoi που περιέχεται στο  $C^\circ$ , είτε ένας εξωτερικός δίσκος Voronoi ο οποίος τέμνει το  $C^\circ$ . Αντίστοιχα, λέμε ότι το σημείο  $q$  βρίσκεται σε διένεξη με την εστία  $C$ .

**Ορισμός 1.1.7 (Περιοχή σκίασης)** Η περιοχή σκίασης (shadow region)  $S_{ij}(C)$  μίας εστίας  $C$  ως προς τη διχοτόμο καμπύλη  $\pi_{ij}$  δύο εστιών  $C_i$  και  $C_j$  είναι ο γεωμετρικός τύπος των σημείων  $q$  της  $\pi_{ij}$  τα οποία βρίσκονται σε διένεξη με τη  $C$ .

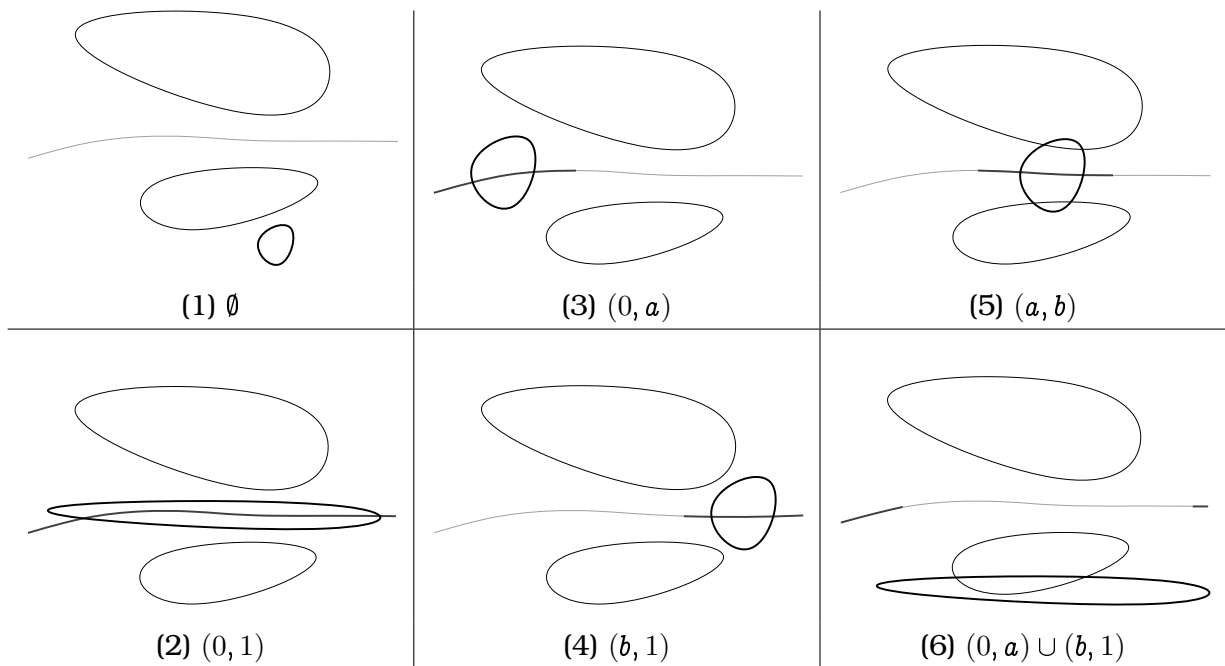
Λόγω του ομοιομορφισμού της διχοτόμου καμπύλης με το  $(0, 1)$ , η περιοχή σκίασης μπορεί να έχει μία από τις εξής 6 μορφές:  $\emptyset$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, a)$ ,  $(b, 1)$ ,  $(a, b)$  και  $(0, a) \cup (b, 1)$ , όπου  $a, b \in (0, 1)$  (βλ. σχήμα 1.6).

**Ορισμός 1.1.8 (Περιοχή διένεξης)** Ονομάζουμε περιοχή διένεξης το υποσύνολο του σκελετού του διαγράμματος Voronoi το οποίο βρίσκεται σε διένεξη με τη νέα εστία  $C$ .

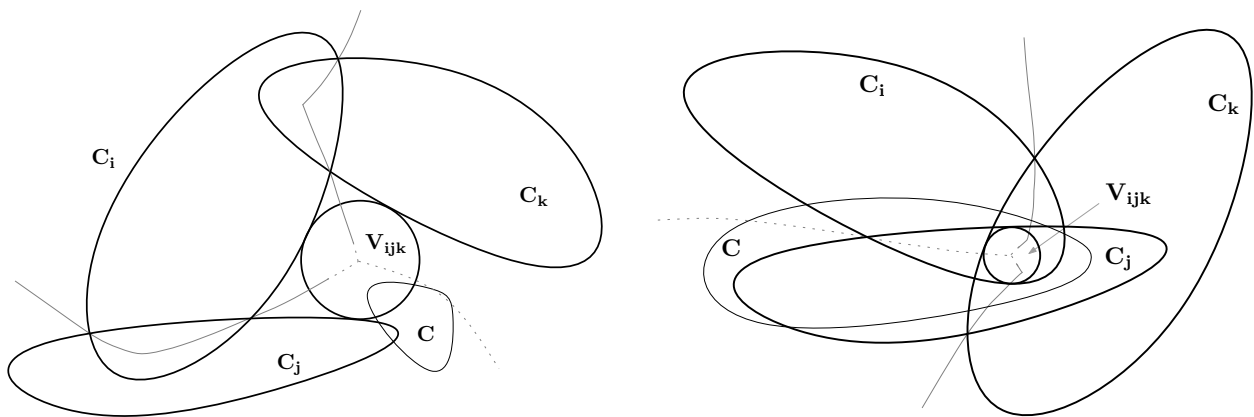
**Πόρισμα 1.1.9 (Διένεξη κορυφής)** Δοδισών τριών εστιών  $C_i, C_j, C_k$ , έστω  $V_{ijk}$  ένας δίσκος Voronoi και  $C$  μία νέα εστία προς εισαγωγή. Αν ο  $V_{ijk}$  είναι εξωτερικός δίσκος Voronoi, τότε η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{ijk}$  αν και μόνο αν ο  $V_{ijk}$  τέμνει το  $C^\circ$  (βλ. σχήμα 1.7 αριστερά). Αν ο  $V_{ijk}$  είναι εσωτερικός δίσκος Voronoi, τότε η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{ijk}$  αν και μόνο αν ο  $V_{ijk}$  περιέχεται στο  $C^\circ$  (βλ. σχήμα 1.7 δεξιά).

Λέμε επίσης ότι μια εστία βρίσκεται σε διένεξη με έναν κύκλο Voronoi  $V_{ijk}$  αν βρίσκεται σε διένεξη με τον αντίστοιχο δίσκο Voronoi  $V_{ijk}$ .

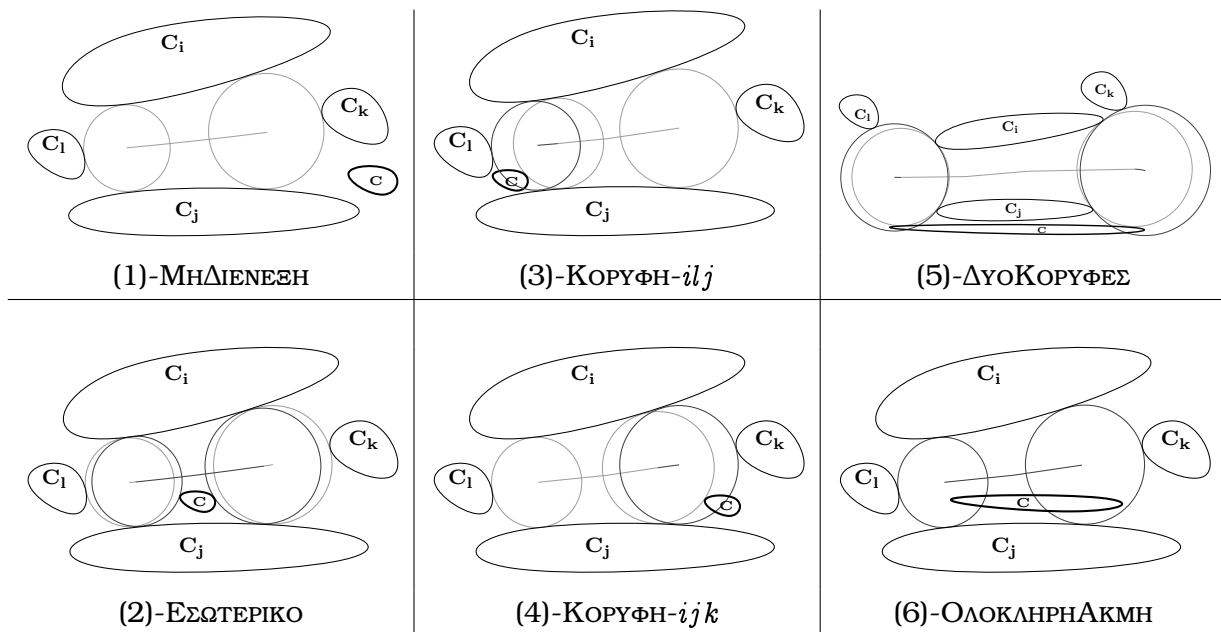




**Σχήμα 1.6:** Οι έξι περιπτώσεις για την περιοχή σκίασης (σκούρο γκρι) μίας εστίας  $C$  (παχιά μύαρη γραμμή)



**Σχήμα 1.7:** Διένεξη εστίας  $C$  με τον εξωτερικό δίσκο Voronoi (αριστερά) ή με τον εσωτερικό (δεξιά). Οι ακμές Voronoi σημειώνονται με συμπαγή γραμμή, η περιοχή διένεξης με διακεκομμένη



**Σχήμα 1.8:** Οι τύποι διένεξης ακμής, ως προς την εστία  $C$  (παχιά μαύρη γραμμή). Πάνω, κάτω, αριστερά και δεξιά οι εστίες  $C_i, C_j, C_l, C_k$  αντίστοιχα

**Ορισμός 1.1.10 (Διένεξη ακμής)** *Μια ακμή Voronoi του τρέχοντος διαγράμματος λέμε ότι βρίσκεται σε διένεξη με τη νέα εστία  $C$  αν κάποιο μέρος της βρίσκεται σε διένεξη με τη  $C$ .*

Έστω  $e$  μια ακμή Voronoi, υποσύνολο της διχοτόμου  $\pi_{ij}$  των  $C_i, C_j$ , τα άκρα της οποίας ορίζονται από κύκλους Voronoi  $V_{ilj}$  και  $V_{ijk}$ . Βάσει του ομοιομορφισμού της  $\pi_{ij}$ , η  $e$  απεικονίζεται σε ένα διάστημα  $[a, b] \subset (0, 1)$ . Το υποσύνολο  $R$  της ακμής που βρίσκεται σε διένεξη με μια εστία  $C$  ισούται με  $[a, b] \cap S_{ij}(C)$ . Κατ' αναλογία με τη μορφή της περιοχής σκίασης, η μορφή του  $R$  ονομάζεται *τύπος διένεξης ακμής* και μπορεί να έχει συνολικά 6 διαφορετικές μορφές (βλ. σχήμα 1.8): (1)  $R = \emptyset$ , που σημαίνει ότι η  $C$  δε βρίσκεται σε διένεξη με την  $e$ . (2)  $R = (a', b')$  και  $a \notin R \wedge b \notin R$ , που σημαίνει ότι η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με το εσωτερικό της  $e$ . (3)  $R = [a, b')$  και  $b \notin R$ , που σημαίνει ότι η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με την κορυφή  $ilj$  της  $e$ . (4)  $R = (a', b]$  και  $a \notin R$ , που σημαίνει ότι η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με την κορυφή  $ijk$  της  $e$ . (5) Το  $R$  αποτελείται από δύο ξένα διαστήματα, τα οποία περιέχουν τα  $a$  και  $b$  αντίστοιχα, που σημαίνει ότι η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη και με τις δύο κορυφές της  $e$ . (6)  $R = [a, b]$ , που σημαίνει ότι η  $C$  βρίσκεται σε διένεξη με ολόκληρη την ακμή  $e$ .

Ο δυναμικός αλγόριθμος του [28] που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζεται στα δύο

παρακάτω θεωρήματα:

**Θεώρημα 1.1.11** Έστω  $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cup \{C\}$  ένα σύνολο ψευδοκύκλων τέτοιο ώστε  $C \notin \mathcal{C}$ . Η περιοχή διένεξης της  $C$  ως προς το  $V(\mathcal{C})$  είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του σκελετού του  $V(\mathcal{C})$ .

**Θεώρημα 1.1.12** Έστω  $\{C_i, C_j, C_k\}$  ένα σύνολο ψευδοκύκλων σε γενική θέση. Τότε το διάγραμμα Voronoi των  $C_i, C_j$  και  $C_k$  έχει το πολύ δύο κορυφές Voronoi.

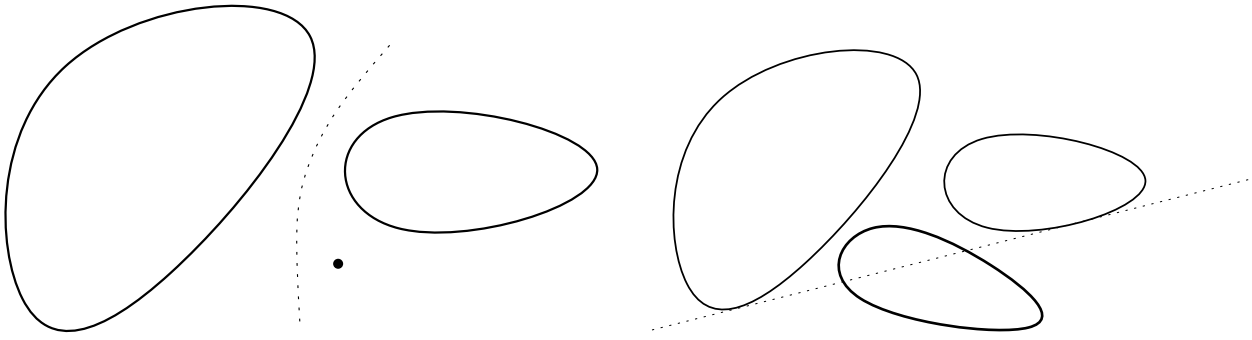
Το θεώρημα μάς λέει ότι δύο διχοτόμοι καμπύλες  $\pi_{ij}$  και  $\pi_{ik}$  που σχετίζονται με την ίδια εστία  $C_i$  έχουν το πολύ δύο σημεία τομής. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή διένεξης μιας νέας εστίας  $C$  περιλαμβάνει το πολύ δύο συνεκτικά υποσύνολα για κάθε ακμή του  $V(\mathcal{C})$ .

Η εισαγωγή μιας νέας εστίας στο τρέχον διάγραμμα Voronoi αποτελείται από τα εξής βήματα:

- α) Εύρεση του πλησιέστερου γείτονα της νέας εστίας.
- β) Εύρεση μίας διένεξης ανάμεσα σε μία ακμή του τρέχοντος διαγράμματος και τη νέα εστία, είτε αναγνώριση περίπτωσης κρυφής εστίας (π.χ. εστία η οποία περιέχεται μέσα σε κάποια άλλη), οπότε και η τελευταία δεν επηρεάζει το διάγραμμα.
- γ) Εύρεση ολόκληρης της περιοχής διένεξης και ενημέρωση του δυϊκού γράφου Delaunay. Η εύρεση της περιοχής διένεξης γίνεται εκτελώντας αναζήτηση κατά βάθος (DFS) στο σκελετό του διαγράμματος Voronoi, ξεκινώντας από το σημείο διένεξης του προηγούμενου βήματος.

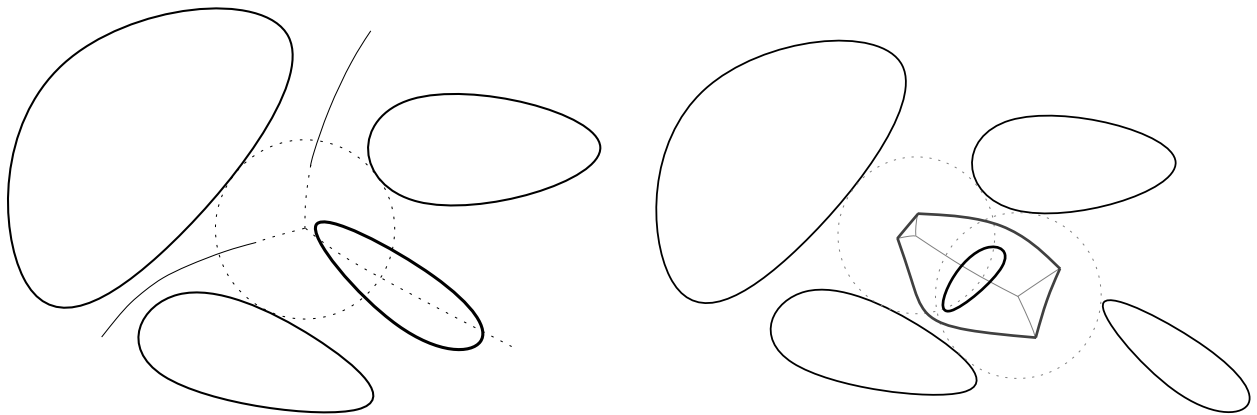
Υπενθυμίζουμε ότι στην πραγματικότητα ενδιαφερόμαστε για τον ακριβή γράφο Delaunay των εστιών (ο οποίος θα περιέχει την ακριβή τοπολογία). Έχοντας έναν ακριβή γράφο Delaunay μπορούμε να προσεγγίσουμε τις ακμές (διχοτόμους) και τις κορυφές του διαγράμματος Voronoi με οποιαδήποτε ακρίβεια θέλουμε (π.χ. με σκοπό να τις σχεδιάσουμε στην οθόνη). Επίσης, ο ακριβής γράφος μας επιτρέπει να σημειώνουμε ορθά τις εκφυλισμένες περιπτώσεις (λ.χ. κορυφές Voronoi με βαθμό μεγαλύτερο του τρία).

Τα παραπάνω βήματα του αλγορίθμου ανάγονται σε ορισμένα γεωμετρικά κατηγορήματα, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως γενίκευση των κατηγορημάτων που μελετώνται στην [24]:



**Σχήμα 1.9:** Αριστερά: `SIDEOFBISECTOR`. Δεξιά: `DISTANCEFROMBITANGENT`

1. `SIDEOFBISECTOR` (βλ. σχήμα 1.9 αριστερά). Δοθισών δύο εστιών και ενός σημείου, να προσδιοριστεί ποια εστία βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο υπό την Ευκλείδεια μετρική. Αυτό το κατηγορήμα χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό του πλησιέστερου γείτονα.
2. `DISTANCEFROMBITANGENT` (βλ. σχήμα 1.9 δεξιά). Δοθισών τριών εστιών, να προσδιοριστεί η σχετική θέση της τρίτης ως προς κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο πρώτων. Αυτό το κατηγορήμα χρησιμοποιείται για να εξακριβωθεί αφενός η ύπαρξη κύκλου Voronoi τριών εστιών, αφετέρου για να διαπιστωθεί αν μία μη φραγμένη ακμή του τρέχοντος διαγράμματος Voronoi βρίσκεται σε διένεξη με τη νεοεισαχθείσα εστία και κατά συνέπεια θα τροποποιηθεί στο νέο διάγραμμα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι υπολογισμού αυτού του κατηγορήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την επίλυση άλλων προβλημάτων μη γραμμικής υπολογιστικής γεωμετρίας, όπως ο υπολογισμός του γράφου ορατότητας και του κυριού περιβλήματος καμπύλων αντικειμένων.
3. `INCIRCLE` (*Διένεξη κορυφής*) (βλ. σχήμα 1.10 αριστερά). Δοθισών τεσσάρων εστιών, να προσδιοριστεί η σχετική θέση της τέταρτης ως προς τον κύκλο Voronoi των τριών πρώτων. Το κατηγορήμα αυτό εξετάζει αν μία κορυφή του τρέχοντος διαγράμματος Voronoi βρίσκεται σε *διένεξη* με τη νέα εστία και κατά συνέπεια δεν θα υπάρχει στο νέο διάγραμμα Voronoi.
4. `EDGECONFLICTTYPE` (*Διένεξη ακμής*) (βλ. σχήμα 1.8 και 1.10 δεξιά). Δοθισών πέντε εστιών  $C_i, C_j, C_k, C_l, C$ , να προσδιοριστεί ο τύπος διένεξης της της ακμής, που ορίζεται από τις κορυφές Voronoi που προσδιορίζουν οι  $C_i, C_l, C_j$  και οι  $C_i, C_j, C_k$ , ως προς την εστία  $C$  που εισάγεται. Ο τύπος διένεξης της ακμής μάς



**Σχήμα 1.10:** Αριστερά: `IN_CIRCLE`. Δεξιά: `EDGE_CONFLICT_TYPE`

δείχνει με ποιον τρόπο θα τροποποιηθεί το τρέχον διάγραμμα Voronoi.

Η αναμενόμενη πολυπλοκότητα (randomized complexity) μίας πράξης εισαγωγής σε ένα διάγραμμα  $n$  εστίων, είναι  $\mathcal{O}(\log^2 n)$  για μη τεμνόμενες εστίες και  $\mathcal{O}(n)$  για τεμνόμενες ή κρυφές εστίες [28].

## 1.2 Βασικά αποτελέσματα της διατριβής

Τα βασικά αποτελέσματα της διατριβής έχουν παρουσιαστεί στις [32, 33, 34]. Αρχικά θεωρήσαμε το πρόβλημα υπολογισμού του διαγράμματος Voronoi ενός συνόλου μη τεμνόμενων ελλείψεων και προτείναμε ολοκληρωμένες μεθόδους ακριβούς αριθμητικής για τον υπολογισμό των κατηγορημάτων του αυξητικού αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, για τα `SIDE_OF_BISECTOR` και `DISTANCE_FROM_BITANGENT` βρούμε βέλτιστες αλγεβρικές συνθήκες ως προς το βαθμό των εμπλεκόμενων αλγεβρικών αριθμών. Για το `IN_CIRCLE` υπολογίζεται αρχικά ένα σφιχτό φράγμα στο πλήθος των μιγαδικών τριεφαπτόμενων κύκλων τριών ελλείψεων και σχεδιάζεται ένας ακριβής αλγόριθμος υπολογισμού και μία μέθοδος υποδιαίρεσης γραμμικής σύγκλισης, οι οποίοι υλοποιούνται σε `MAPLE`. Με αυτές τις τεχνικές δύναται να απαντηθεί και το κατηγορημα `EDGE_CONFLICT_TYPE`. Η μέθοδος υποδιαίρεσης επειδή είναι προσαρμοσμένη στο συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι γρηγορότερη από γενικές μεθόδους επίλυσης και αποφασίζει το `IN_CIRCLE` μόλις έχει φτάσει την ακρίβεια που χρειάζεται.

Η προκαταρκτική αυτή εξέταση του προβλήματος θα μας οδηγήσει στη συνέχεια σε μία βελτιωμένη μέθοδο υποδιαίρεσης, σε φράγματα αλγεβρικών βαθμών για οποιεσ-

δήποτε παραμετρικές καμπύλες, σε έναν τρόπο γρήγορου υπολογισμού της απαλοίφουσας του συστήματος και τελικά στην υλοποίηση του αλγορίθμου σε C++.

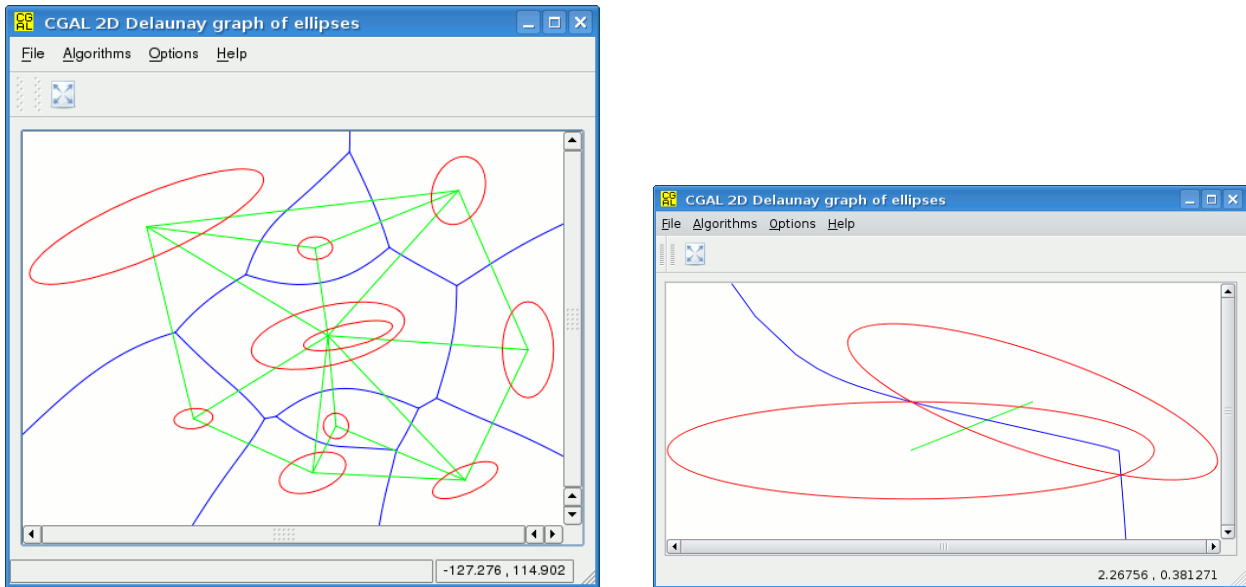
**Επιτάχυνση του INCIRCLE.** Προτείνεται μια μέθοδος υποδιαίρεσης για την επίλυση ενός αλγεβρικού συστήματος που εκφράζει τον κύκλο Voronoi η οποία επιτυγχάνει τετραγωνική σύγκληση εκμεταλλευόμενη τις γεωμετρικές ιδιότητες του προβλήματος. Η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολη στην υλοποίηση, γιατί αποφεύγει τον υπολογισμό μερικών παραγώγων.

Επιτυγχάνεται έτσι μια υλοποίηση πραγματικού χρόνου για μη εκφυλισμένες περιπτώσεις, ενώ στις εκφυλισμένες περιπτώσεις δείχνεται ότι είναι δυνατό να υπολογίσουμε την απαλοίφουσα ενός αλγεβρικού συστήματος που εκφράζει τον κύκλο Voronoi μέσα σε λογικά χρονικά πλαίσια και να απαντήσουμε στο κατηγορήμα.

Πειράματα με την υλοποίηση που έγινε σε C++ δείχνουν ότι οι περισσότερες περιπτώσεις απαντώνται σε λιγότερο από 0.1 sec, σε έναν Pentium-4 2.6GHz, ενώ εκφυλισμένες περιπτώσεις με συντελεστές εισόδου 10-bit παίρνουν μέχρι 13 sec. Η μέθοδος υποδιαίρεσης δουλεύει για οποιαδήποτε καμπύλα αντικείμενα. Επειδή χρησιμοποιείται αριθμητική διαστημάτων, οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί είναι εγγυημένοι.

**Γράφος Delaunay κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων.** Γενικεύεται η ανάλυση των κατηγορημάτων ώστε να καλύπτει την περίπτωση του γράφου Delaunay κυρτών ομαλών ψευδοκύκλων που δίνονται σε παραμετρική μορφή. Αναλύεται η αλγεβρική πολυπλοκότητα των κατηγορημάτων και τέλος μελετάται το INCIRCLE το οποίο εκφράζεται με ένα αραιό  $5 \times 5$  σύστημα του οποίου είναι δυνατό να υπολογίσουμε την απαλοίφουσα μέσω διαδοχικών απαλοίφουσών Sylvester και ενός λήμματος παραγοντοποίησης.

**Υλοποίηση.** Τέλος, υλοποιούνται όλα τα κατηγορήματα σε C++ στην περίπτωση μη τεμνόμενων ελλείψεων στο επίπεδο (σχήμα 1.11 αριστερά) επεκτείνοντας τον αντίστοιχο αλγόριθμο για το Απολλώνιο διάγραμμα κύκλων της βιβλιοθήκης CGAL. Για το αλγεβρικό υπόβαθρο χρησιμοποιείται η βιβλιοθήκη SYNAPS [35]. Πρόκειται, απ' όσο γνωρίζουμε, για την πρώτη ακριβή υλοποίηση μη γραμμικής υπολογιστικής γεωμετρίας η οποία χειρίζεται αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 184. Η μέθοδος υποδιαίρεσης υλοποιείται με αριθμητική διαστημάτων πολλαπλής ακριβείας με αποτέλεσμα



**Σχήμα 1.11:** Αριστερά: Διάγραμμα Voronoi ελλείψεων και δικός γράφος Delaunay. Δεξιά: Διάγραμμα Voronoi και δικός γράφος δύο τεμνόμενων ελλείψεων

να μπορεί να επιτύχει οποιαδήποτε ακρίβεια με λογαριθμικό πλήθος επαναλήψεων. Στην καρδιά του αλγορίθμου υποδιαίρεσης, έχει υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος επίλυσης Newton μίας μεταβλητής με αριθμητική διαστημάτων, ο οποίος μάλιστα έχει γίνει μέρος της βιβλιοθήκης SYNAPS.

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε χρειάζεται περίπου 98 sec για την κατασκευή του γράφου Delaunay 128 μη τεμνόμενων ελλείψεων, όταν δεν προκύπτουν εκφυλισμένες περιπτώσεις. Είναι πιο γρήγορος από την αντίστοιχη υλοποίηση της CGAL για το γράφο Delaunay ευθυγράμμων τμημάτων, όταν οι ελλείψεις προσεγγίζονται με  $\nu$ -γωνα για  $\nu > 15$ . Είναι γρηγορότερος επίσης και από τον κώδικα για την τριγωνοποίηση Delaunay (και το διάγραμμα Voronoi) σημείων, όταν οι ελλείψεις προσεγγίζονται με περισσότερα από 240 σημεία. Από τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται ότι η σωστή υλοποίηση ακριβούς αριθμητικής με χρήση φίλτρων και εξειδικευμένων αλγορίθμων, αφενός είναι γρηγορότερη από « γενικό » λογισμικό υπολογισμών (π.χ. επίλυσης συστημάτων), αφετέρου τα καμπύλα αντικείμενα μπορούν να αποθούν πιο αποδοτικά διότι δε χρειάζεται να δουλεύουμε με προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό τμημάτων ή σημείων.

Η υλοποίηση προορίζεται να γίνει πακέτο της βιβλιοθήκης CGAL και για το σκοπό αυτό στο τελευταίο στάδιο της διατριβής αναπροσαρμόστηκε (ξαναγράφοντας ορι-

σμένα τμήματα) ακολουθώντας το πρότυπο ανάπτυξης κώδικα της CGAL και χρησιμοποιώντας έναν νέο αλγεβρικό πυρήνα. Παράλληλα ξεκίνησε και η υποστήριξη τεμνόμενων ελλείψεων (σχήμα 1.11 δεξιά).

### 1.3 Οργάνωση της διατριβής

Η διατριβή οργανώνεται ως εξής: Στο κεφάλαιο 2 εξετάζεται ο υπολογισμός βασικών γεωμετρικών κατασκευών, όπως η εφαπτομένη και η κάθετος, και αναλύεται ο υπολογισμός των κατηγορημάτων `SideOfBisector` και `DistanceFromBitangent` στη περίπτωση τόσο των κωνικών τομών, όσο και των παραμετρικών καμπυλών γενικότερα. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μία εισαγωγή στην αλγεβρική ανάλυση του `InCircle`, υπολογίζοντας το πλήθος των μιγαδικών τριεφαπτόμενων κύκλων τριών ελλείψεων.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 3 αναλύεται το κατηγορήμα `InCircle` στην περίπτωση ψευδοκύκλων, το οποίο υπολογιστικά είναι το πιο δύσκολο. Μελετώνται αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες των διχοτόμων καμπυλών και των κύκλων Voronoi και παρουσιάζεται ένας τρόπος υπολογισμού της απαλοίφουσας του αλγεβρικού συστήματος, καθώς και ένας αλγόριθμος υποδιαίρεσης για γρήγορη προσέγγιση της λύσης. Το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση του κατηγορήματος `EdgeConflictType`, η οποία βασίζεται στις τεχνικές υπολογισμού του `InCircle`.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η υλοποίηση των παραπάνω τεχνικών σε C++, ώστε να αποτελέσουν έναν ολοκληρωμένο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του γράφου Delaunay ελλείψεων και του δυϊκού διαγράμματος Voronoi. Τα πειραματικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στη θεωρία.

Τέλος, το κεφάλαιο 5 ολοκληρώνει τη διατριβή, συνοψίζοντας τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν, παρουσιάζοντας ορισμένα ανοιχτά προβλήματα καθώς και κάποιες πιθανές επεκτάσεις.



# Κεφάλαιο 2

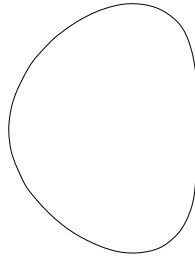
## Βασικά κατηγορήματα

### 2.1 Αναπαράσταση

Οι εστίες της εισόδου δίνονται σε παραμετρική μορφή. Συμβολίζουμε με  $C_t$  μία κυρτή ομαλή κλειστή καμπύλη με παράμετρο  $t$ . Η ομαλότητα επιτρέπει τον ορισμό της εφαπτομένης (και της καθέτου) σε κάθε σημείο της καμπύλης. Χρησιμοποιούμε ως δείκτη το όνομα της παραμέτρου κάθε εστίας, έτσι αντί για π.χ. για  $C_i, C_j$  μπορούμε να γράφουμε  $C_t, C_r$  εννοώντας δύο εστίες, μία με παράμετρο  $t$  και μία με παράμετρο  $r$ . Αναφερόμαστε σε ένα σημείο  $p$  της  $C_t$  με τιμή παραμέτρου  $\hat{t}$  ως  $p_{\hat{t}}$ , είτε πιο απλά ως  $\hat{t}$ , όταν είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα. Συμβολίζουμε με  $C_t^\circ$  την περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από την  $C_t$  και με  $C_t$  ολόκληρη την εστία. Μία καμπύλη  $C_t$  δίνεται από την απεικόνιση

$$C_t : \mathbb{R} \ni t \mapsto (X_t(t), Y_t(t)) = \left( \frac{F_t(t)}{H_t(t)}, \frac{G_t(t)}{H_t(t)} \right), \quad (2.1)$$

όπου  $F_t, G_t$  και  $H_t$  είναι πολυώνυμα στο  $\mathbb{Z}[t]$ , με βαθμούς που φράσσονται από το  $d$ , μέγιστο δυαδικό μήκος (πλήθος δυαδικών ψηφίων) συντελεστών  $\tau$  και  $\gcd(F_t, G_t, H_t) = 1$ , όπου  $\gcd$  συμβολίζει το ΜΚΔ των πολυωνύμων. Επειδή η καμπύλη είναι κλειστή, θα πρέπει  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} X_t(t) \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y_t(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Y_t(t) \in \mathbb{R}$ . Το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο  $t$ , όταν  $t \rightarrow \pm\infty$ , το ονομάζουμε  $\infty$ -point. Παράδειγμα τέτοιας καμπύλης αποτελεί το γνωστό « φασόλι » (σχ. 2.1). Ο τρόπος με τον οποίο θα αναλύσουμε τα κατηγορήματα μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που τα πολυώνυμα  $F_t, G_t, H_t$  έχουν διαφορετικούς βαθμούς ή ακόμα και όταν οι ρητές συναρτήσεις  $X_t, Y_t$  έχουν διαφορετικούς παρονομαστές. Θεωρούμε τις εξισώσεις (2.1) για λόγους απλότητας. Επίσης, στο κεφ. 5 θα δούμε τι αλλάζει



**Σχήμα 2.1:** Η καμπύλη « φασόλι »  $t \mapsto (\frac{1+t^2}{t^4+t^2+1}, \frac{t(1+t^2)}{t^4+t^2+1})$

στους υπολογισμούς μας όταν αντί για  $t \in \mathbb{R}$  θεωρήσουμε  $t \in [a, b]$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι  $H_t(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$  και ότι καθώς το  $t$  κινείται από το  $-\infty$  στο  $+\infty$ , το σημείο  $(X_t(t), Y_t(t))$  διαγράφει το σύνορο της  $C_t$  κατά τη θετική φορά. Για απλούστευση του συμβολισμού γράφουμε  $F_t$  αντί  $F_t(t)$  και με  $F'_t$  συμβολίζουμε την παράγωγό της ως προς  $t$ . Αν οι καμπύλες που ορίζονται είναι κωνικές τομές, τότε  $d = 2$ . Η έλλειψη και ο κύκλος (που μπορεί να θεωρηθεί ως μία εκφυλισμένη έλλειψη) είναι οι μόνες δυνατές κλειστές κυρτές καμπύλες που μπορούν να αναπαρασταθούν.

Με  $\mathcal{O}$  συμβολίζουμε την αριθμητική πολυπλοκότητα και πρόκειται για τον κλασικό συμβολισμό « μεγάλο όμικρον ». Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς  $\tilde{\mathcal{O}}_B$  και  $\tilde{\mathcal{O}}$  για να συμβολίσουμε τη δυαδική και αριθμητική πολυπλοκότητα αντίστοιχα, όταν αγνοούμε (πολυ)λογαριθμικούς παράγοντες. Για ένα πολυώνυμο  $A = \sum_{i=1}^d a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ , το  $\text{dg}(A)$  συμβολίζει το βαθμό του. Με  $\mathcal{L}(A)$  συμβολίζουμε το μέγιστο δυαδικό μήκος των συντελεστών του  $A$  (συμπεριλαμβανομένου και του bit προσήμου). Αν  $a = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ ,  $b, c \in \mathbb{Z}$ , τότε  $\mathcal{L}(a) \geq 1$  και  $\mathcal{L}(a) = \max\{\mathcal{L}(b), \mathcal{L}(c)\}$ . Οι αλγεβρικοί αριθμοί (πραγματικές ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές) αναπαρίστανται με τη μορφή *διαστημάτων απομόνωσης*. Για έναν αριθμό  $\alpha$ , η αναπαράσταση αυτή αποτελείται από ένα πολυώνυμο ελεύθερο τετραγώνων, έστω  $A$ , το οποίο μηδενίζεται στο  $\alpha$  καθώς και ένα ρητό διάστημα, έστω  $[a, b]$ , το οποίο περιέχει τον  $\alpha$  και καμία άλλη πραγματική ρίζα του  $A$ , και γράφουμε  $\alpha \cong (A, [a, b])$ . Για παράδειγμα, έστω  $A = -8x^5 - 29x^4 + 95x^3 + 11x^2 - 49x - 47$ . Το πολυώνυμο αυτό έχει 3 πραγματικές ρίζες  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  που ισούνται περίπου με  $-5.654, 1.257, 1.794$  αντίστοιχα. Μπορούμε να γράψουμε  $\alpha_1 \cong (A, [-8, -4])$ ,  $\alpha_2 \cong (A, [1, \frac{3}{2}])$  και  $\alpha_3 \cong (A, [\frac{3}{2}, 2])$ . Για απλότητα στους συμβολισμούς υποθέτουμε ότι για κάθε πολυώνυμο ισχύει ότι  $\log(\text{dg}(A)) = \mathcal{O}(\mathcal{L}(A))$ . Περισσότερα για τους παραπάνω συμβολισμούς στο [36].



### 2.1.1 Κωνικές τομές – Ελλείψεις

Οι κωνικές τομές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι περιγράφονται απλά τόσο στον καρτεσιανό όσο και στον παραμετρικό χώρο. Θεωρούμε ότι μια έλλειψη δίνεται σε ρητή παραμετρική μορφή που καθορίζεται από πέντε παραμέτρους: ημιάξονες, κέντρο και στροφή (βλ. σχήμα 2.2). Για μια γραφική διεπαφή είναι περισσότερο διαισθητικό να καθορίζεται η έλλειψη με βάση αυτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, αντί να απαιτείται να δοθούν οι συντελεστές της πεπλεγμένης μορφής. Η παραμετρική μορφή ενδείκνυται επίσης για την «ιχνηλάτηση» της καμπύλης, η οποία είναι κρίσιμη για τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης που θα παρουσιάσουμε για το INCIRCLE. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δοθείσας της παραμετρικής μορφής, μπορούμε πάντα να βρούμε την πεπλεγμένη μορφή, μιας και οι συντελεστές της τελευταίας αποτελούν ρητές εκφράσεις των συντελεστών της πρώτης. Το αντίθετο δεν είναι πάντοτε δυνατό χρησιμοποιώντας μόνο αριθμητική ρητών.

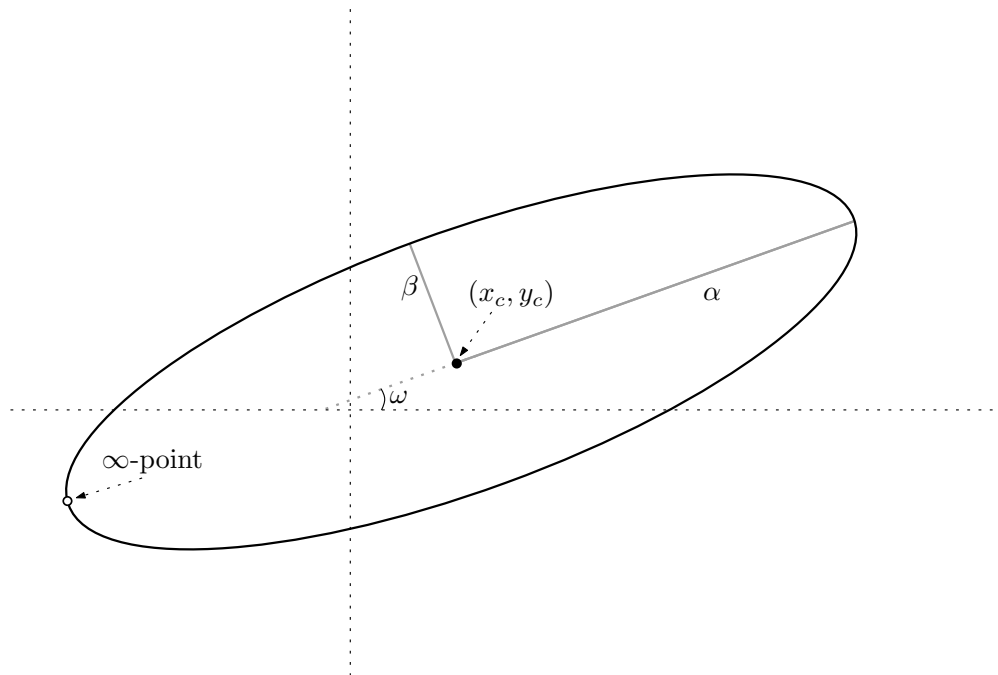
Η παραμετρική μορφή της έλλειψης είναι

$$\begin{aligned} X_t(t) &= x_c + \alpha \left( \frac{1-w^2}{1+w^2} \right) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) - \beta \left( \frac{2w}{1+w^2} \right) \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) \\ &= x_c + \frac{-\alpha(1-w^2)t^2 - 4\beta wt + \alpha(1-w^2)}{(1+w^2)(1+t^2)}, \\ Y_t(t) &= y_c + \alpha \left( \frac{2w}{1+w^2} \right) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + \beta \left( \frac{1-w^2}{1+w^2} \right) \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) \\ &= y_c + 2 \frac{-\alpha wt^2 + \beta(1-w^2)t + \alpha w}{(1+w^2)(1+t^2)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου  $\alpha, \beta$  είναι τα μήκη του μεγάλου και μικρού ημιάξονα αντίστοιχα,  $t = \tan(\theta/2) \in \mathbb{R}$ ,  $\theta$  η γωνία που διαγράφει ένα σημείο της έλλειψης ως προς τον ημιάξονα  $\alpha$ ,  $w = \tan(\omega/2)$ ,  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας με τον οριζόντιο και  $(x_c, y_c)$  το κέντρο της έλλειψης (σχήμα 2.2). Η επιλογή του  $w$  ως παραμέτρου εισόδου αντί του  $\cos \omega$  και του  $\sin \omega$  μειώνει κατά ένα τον αριθμό των παραμέτρων εισόδου. Η έννοια της ρητής γωνίας (ως προς τη συνάρτηση  $\tan$ ) υπονοεί ότι κάποια διεπαφή χρήστη (όπου ο χρήστης σχεδιάζει τη γωνία) ενδέχεται να χρειαστεί να διορθώσει λίγο τη γωνία ώστε να επιτύχει ρητό  $w$ .

Το  $\infty$ -point της έλλειψης είναι το  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (X_t(t), Y_t(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (X_t(t), Y_t(t)) = (x_c - \alpha \cos \omega, y_c - \beta \sin \omega)$ . Βλέπουμε ότι πρόκειται για το ένα άκρο του μεγάλου άξονά της. Η συμμετρική έλλειψη (ως προς το κέντρο της) είναι

$$\bar{X}_t(t) = x(-1/t) \quad \bar{Y}_t(t) = y(-1/t)$$



**Σχήμα 2.2:** Ορισμός της έλλειψης από τους ημιάξονες, το κέντρο και τη στροφή

και θα την ονομάσουμε *δίδυμη έλλειψη*. Αν και το γράφημα μιας έλλειψης συμπίπτει με τη δίδυμή της, κάθε σημείο της πρώτης είναι διαφορετικό από το δίδυμό του, συμπεριλαμβανομένου και του  $\infty$ -point, το οποίο απεικονίζεται στο άλλο άκρο του μεγάλου άξονα. Συμβολίζουμε με  $E_t$  μια έλλειψη με παράμετρο  $t$  και με  $\bar{E}_t$  τη δίδυμή της. Στην περίπτωση κύκλων το  $\infty$ -point είναι το αριστερότερο σημείο του κύκλου, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό (θεωρώντας μηδενική στροφή). Οι δίδυμες ελλείψεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποφύγουμε τον ιδιαίτερο χειρισμό των  $\infty$ -point, όπως θα δούμε στην ενότητα 3.7. Παρατηρείστε ότι η μορφή (2.2) με  $\alpha, \beta, \omega, x_c, y_c \in \mathbb{Q}$  μπορεί να μετατραπεί «κάνοντας τις πράξεις» στη μορφή (2.1), όπου τα πολυώνυμα έχουν ακέραιους συντελεστές.

Μια έλλειψη περιγράφεται από την ακόλουθη πεπλεγμένη μορφή κωνικής:

$$E(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \in \mathbb{Q}[x, y]. \quad (2.3)$$

Οι συντελεστές της (2.3) είναι πολυώνυμα στους συντελεστές της (2.2):

$$\begin{aligned} \chi &= y_c w^2 + 2x_c w - y_c \\ \psi &= x_c w^2 - 2y_c w - x_c \\ (1 + w^2)^2 a &= 4w^2 \alpha^2 + (\omega - 1)^2 (\omega + 1)^2 \beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1+w^2)^2 b &= 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)w(w-1)(w+1) \\
 (1+w^2)^2 c &= 4w^2\beta^2 + (w-1)^2(w+1)^2\alpha^2 \\
 (1+w^2)^2 d &= -2w\chi\alpha^2 - (w-1)(w+1)\psi\beta^2 \\
 (1+w^2)^2 e &= +2w\psi\beta^2 - (w-1)(w+1)\chi\alpha^2 \\
 (1+w^2)^2 f &= \chi^2\alpha^2 + \psi^2\beta^2 - (1+w^2)^2\alpha^2\beta^2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κατά τη μετατροπή σε πεπλεγμένη μορφή, το δυαδικό μήκος των συντελεστών της τελευταίας αυξάνεται χονδρικά τουλάχιστον 4 φορές σε σχέση με το δυαδικό μήκος των συντελεστών εισόδου της παραμετρικής μορφής. Σημειωτέον ότι τα  $\chi$  και  $\psi$  περιγράφουν τις εξισώσεις του μεγάλου και μικρού άξονα αντίστοιχα, όταν γίνεται αποτίμηση στο σημείο  $(x_c, y_c)$ . Οι ακόλουθες ποσότητες αποτελούν *αναλλοίωτες* ως προς τη στροφή και τη μετατόπιση:

$$J_1 = a + c = \alpha^2 + \beta^2, \quad J_2 = ac - b^2 = \alpha^2\beta^2, \tag{2.5}$$

ενώ η  $J_4 = J_2(x_c^2 + y_c^2 - J_1)$  είναι αναλλοίωτη μόνο ως προς τη στροφή. Τέλος, για τις συντεταγμένες του κέντρου της έλλειψης έχουμε

$$(x_c, y_c) = \left( \frac{be - cd}{J_2}, \frac{bd - ae}{J_2} \right).$$

Όταν μια έλλειψη δίνεται σε παραμετρική μορφή, κατασκευαστικά (άξονες, κέντρο και στροφή), οι σχέσεις (2.4) μάς επιτρέπουν να βρούμε την πεπλεγμένη της μορφή.

Η (2.3) μπορεί να γραφεί επίσης ως *διγραμμική μορφή*

$$[x, y, 1]M[x, y, 1]^T, \tag{2.6}$$

όπου

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Έστω  $M_1$  και  $M_2$  δύο τέτοιοι πίνακες της διγραμμικής μορφής. Το άθροισμα  $\lambda M_1 + M_2$  αποτελεί μία *δέσμη* κωνικών τομών [38], ενώ το *χαρακτηριστικό της πολυώνυμο*  $\varphi(\lambda)$  ισούται με

$$\varphi(\lambda) = |\lambda M_1 + M_2| \tag{2.7}$$

και είναι βαθμού 3 ως προς  $\lambda$ . Το πρόσημο και η πολλαπλότητα των πραγματικών ριζών του  $\varphi(\lambda)$  μας δίνουν πληροφορίες για τη σχετική θέση των δύο κωνικών τομών [38, 39].

## 2.2 Απλές κατασκευές

### 2.2.1 Εφαπτομένη

Έστω  $p_t = (X_t, Y_t)$  ένα σημείο της καμπύλης  $C_t$ . Η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο  $p_t$  είναι

$$(T_t) : (y - Y_t)X'_t - (x - X_t)Y'_t = 0.$$

Αντικαθιστώντας τις ρητές συναρτήσεις των  $X_t$  και  $Y_t$  και απαλείφοντας τους παρονομαστές οδηγούμαστε σε ένα πολυώνυμο στο  $\mathbb{Z}[x, y, t]$ , το οποίο θα συμβολίζουμε με  $T_t(x, y, t)$ . Το  $T_t$  είναι γραμμικό ως προς  $x$  και  $y$ , αφού πρόκειται για εξίσωση ευθείας, βαθμού το πολύ  $2d - 2$  ως προς  $t$  και με μέγεθος συντελεστών  $\leq 2\tau + 2\log(d)$  (υπενθυμίζουμε ότι  $\tau$  είναι το μέγιστο δυαδικό μήκος συντελεστών των πολυωνύμων ορισμού της  $C_t$ ). Με μια πρώτη ματιά ο βαθμός φαίνεται να είναι ίσος με  $2d - 1$ , ωστόσο μια πιο προσεκτική παρατήρηση δείχνει ότι τα γινόμενα των μεγιστοβάθμιων συντελεστών των  $Y'_t, X_t$  και  $X'_t, Y_t$  αλληλοαναιρούνται.

### 2.2.2 Κάθετος

Η εξίσωση της καθέτου στο σημείο  $p_t$  της καμπύλης είναι

$$(N_t) : (x - X_t)X'_t + (y - Y_t)Y'_t = 0.$$

Όπως και στην περίπτωση της εφαπτομένης, με αντικατάσταση και απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε το πολυώνυμο  $N_t(x, y, t) \in \mathbb{Z}[x, y, t]$ , το οποίο είναι γραμμικό ως προς  $x$  και  $y$ , ενώ ως προς  $t$ ,  $\text{dg}(N_t) \leq 3d - 2$  και  $\mathcal{L}(N_t) = 3\tau + 3\log(d)$ .

### 2.2.3 Εσωτερικό σημείο

Δοθείσας μίας εστίας  $C_t$ , θεωρούμε δύο ρητούς  $t_1, t_2$  με  $t_1 \neq t_2$ . Το ευθύγραμμο τμήμα  $p_{t_1}p_{t_2}$  βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στην  $C_t$ , αφού η  $C_t$  είναι κυρτή και ομαλή. Επομένως το σημείο  $((X_t(t_1) + X_t(t_2))/2, (Y_t(t_1) + Y_t(t_2))/2) \in C_t^\circ$  (βλ. σχήμα. 2.3). Αν το δυαδικό μήκος των  $t_1, t_2$  είναι  $\sigma$ , τότε το δυαδικό μήκος των συντεταγμένων του εσωτερικού σημείου είναι  $\mathcal{O}(d\sigma + \tau)$  και στη δυαδική πολυπλοκότητα της κατασκευής αυτής υπερσχύει η πολυπλοκότητα των αποτιμήσεων  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^2\sigma + d\tau)$  [34].

Σημειωτέον ότι όταν η εστία είναι έλλειψη, τότε ένα εσωτερικό σημείο είναι το κέντρο της, το οποίο δίνεται ως είσοδος.

## 2.3 Σχετική Θέση εστιών

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη σχετική θέση δύο εστιών  $C_t$  και  $C_r$  σε γενική θέση, δηλαδή να εξακριβώσουμε αν οι εστίες τέμνονται ή όχι, αν εφάπτονται εξωτερικά ή αν η μία βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης. Αυτό μπορεί να γίνει με τον υπολογισμό και τον χαρακτηρισμό όλων των κοινών τους εφαπτομένων, εξαιτίας των ακόλουθων ιδιοτήτων:

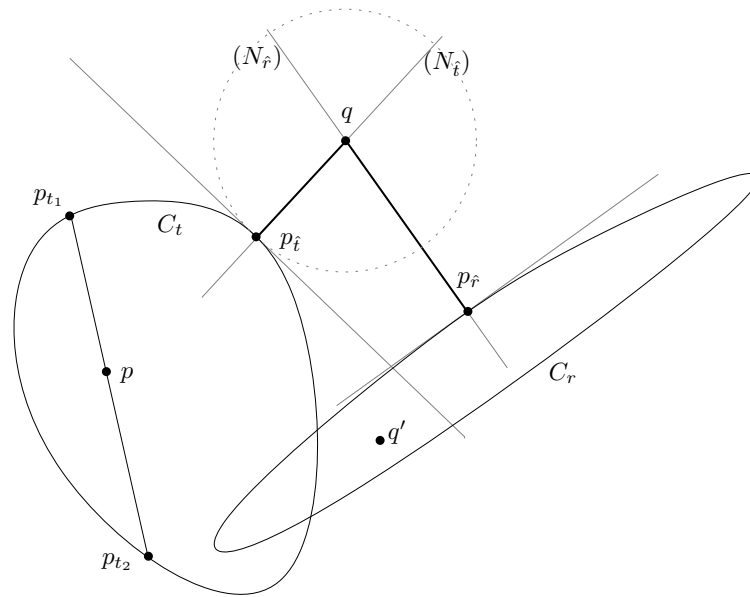
- α) Αν οι δύο εστίες επιδέχονται περισσότερες από δύο εξωτερικές εφαπτομένες, τότε δεν αποτελούν σύνολο ψευδοκύκλων.
- β) Αν η μία εστία περιέχεται στο εσωτερικό της άλλης, τότε δεν έχουν κοινές εφαπτομένες. Αν η μία εστία εφάπτεται εσωτερικά στην άλλη, τότε αυτές έχουν ένα σταθερό αριθμό από κοινές εξωτερικές εφαπτομένες. Απαιτούνται περαιτέρω υπολογισμοί για να διαχωριστεί αυτή η περίπτωση από την (α). Υπενθυμίζουμε ότι όταν οι εστίες εφάπτονται εσωτερικά, τότε δε βρίσκονται σε γενική θέση.
- γ) Αν δύο εστίες δεν τέμνονται, τότε έχουν δύο εσωτερικές και δύο εξωτερικές κοινές εφαπτομένες (έχουν μόνο μία εσωτερική κοινή εφαπτομένη όταν εφάπτονται εξωτερικά).

Οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης και για το χαρακτηρισμό της σχετικής θέσης σημείου και εστίας, διότι αν ένα σημείο βρίσκεται εντός μίας εστίας, τότε δεν υπάρχουν εφαπτομένες ευθείες στην εστία που να περνάνε από εκείνο το σημείο. Συνεπώς, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξακριβώσουμε ποια εστία βρίσκεται μέσα σε μια άλλη, επιλέγοντας ένα σημείο στο σύνορο της μίας εστίας.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, χρειάζεται να υπολογίσουμε τα σημεία τομής δύο εστιών  $C_t$  και  $C_r$ . Αυτό μπορεί να γίνει υπολογίζοντας την απαλοίφουσα των  $F_t H_r - F_r H_t$  και  $G_t H_r - G_r H_t$  ως προς  $r$ , η οποία είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $d^2$  ως προς  $t$ , έχοντας απαλείψει τον παράγοντα  $H_t^d$ .

Στην περίπτωση κωνικών τομών, η παραπάνω μέθοδος προσδιορισμού των κοινών εφαπτομένων οδηγεί σε πολυώνυμο βαθμού τέσσερα. Εναλλακτικά, για τη σχετική θέση δύο ελλείψεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διγραμμική μορφή (2.6) και να αναγάγουμε το πρόβλημα στη μελέτη του χαρακτηριστικού τους πολυωνύμου που είναι βαθμού τρία [39]. Το μειονέκτημα είναι ότι αυτό το πολυώνυμο έχει χονδρικά 12 φορές μεγαλύτερο μέγεθος συντελεστών.





**Σχήμα 2.3:** Υπολογισμός εσωτερικού σημείου  $p$ , καθώς και του `SIDEOfBISECTOR` για το σημείο  $q$

## 2.4 Πλευρά της διχοτόμου

Δίνονται δύο εστίες  $C_t$  και  $C_r$  και ένα σημείο  $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ . Ζητείται να βρούμε ποια εστία βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο, υπό την Ευκλείδεια μετρική.

Η απόσταση ισούται κατ' απόλυτο τιμή με την ακτίνα του μικρότερου κύκλου με κέντρο το  $q$  που εφάπτεται στην καμπύλη. Από τον ορισμό 1.1.1 προκύπτει ότι αν το  $q$  βρίσκεται εκτός της  $C_t$  και εντός της  $C_r$ , τότε αυτό βρίσκεται πλησιέστερα στη  $C_r$ . Στο σχήμα 2.3, το  $q'$  βρίσκεται πλησιέστερα στην  $C_r$ . Διαφορετικά, αν το  $q$  βρίσκεται εντός ή εκτός και των δύο εστιών, τότε θα πρέπει να συγκρίνουμε τις αποστάσεις του  $q$  από τις δύο καμπύλες. Το κατηγορημα αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.3.

Για τη σύγκριση των αποστάσεων, θα συγκρίνουμε το τετράγωνο του μήκους των ευθυγράμμων τμημάτων  $qp_i$  και  $qp_{\hat{r}}$ . Η αναπαράσταση και σύγκριση τέτοιων αριθμών γίνεται με χρήση διαστημάτων απομόνωσης.

Οι πραγματικές ρίζες  $\hat{t}$  του  $N_t(q_1, q_2, t)$  (ως προς  $t$ ) αντιστοιχούν σε εκείνες τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες η κάθετος στο  $p_i = (X_t(\hat{t}), Y_t(\hat{t}))$  περνά από το  $q = (q_1, q_2)$ . Έτσι το τετράγωνο του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος  $qp_i$  είναι

$$A_q(\hat{t}) = \|q - p_i\|^2 = (X_t(\hat{t}) - q_1)^2 + (Y_t(\hat{t}) - q_2)^2.$$

Οι αριθμοί  $A_q(\hat{t})$  ανήκουν στην αλγεβρική επέκταση  $\mathbb{Q}(\hat{t})$  και ο μικρότερος από αυτούς, τον οποίο συμβολίζουμε με  $\delta$ , εκφράζει το τετράγωνο της απόστασης του  $q$

από την καμπύλη. Έστω τώρα το πολυώνυμο  $R \in \mathbb{Z}[x]$ , που ορίζεται ως  $R(x) = \text{Res}_t(x - A_q(t), N_t(q_1, q_2, t))$ . Τότε ο αλγεβρικός αριθμός  $\delta$  είναι η μικρότερη θετική ρίζα του  $R(x)$ . Έστω  $\sigma$  το δυαδικό μήκος των συντεταγμένων του  $q$ . Έχουμε  $\text{dg}_x(R) \leq 3d - 2$ ,  $\mathcal{L}(R) = \mathcal{O}(d^2 + d\tau + d\sigma)$ , και τελικά το διάστημα απομόνωσης  $[0, c]$  για το  $\delta$  υπολογίζεται σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^6 + d^5\tau + d^5\sigma)$ , όπου  $\mathcal{L}(c) = \mathcal{O}(d^3 + d^2\tau + d^2\sigma)$  [40, 34]. Βρίσκοντας με τον ίδιο τρόπο και την απόσταση του  $q$  από τη δεύτερη καμπύλη, συγκρίνουμε τελικά τους δύο αλγεβρικούς αριθμούς σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^6 + d^5\tau + d^5\sigma)$ . Το συνολικό κόστος είναι  $\tilde{\mathcal{O}}_B(N^6)$ , όπου  $N = \max\{d, \sigma, \tau\}$ .

Ο βαθμός των εμπλεκόμενων αλγεβρικών αριθμών σε αυτό το κατηγορήμα είναι  $3d - 2$ . Στην περίπτωση κωνικών τομών, ο βαθμός αυτός γίνεται 4 και είναι βέλτιστος, όπως θα δούμε στη ενότητα που ακολουθεί.

### 2.4.1 Κωνικές τομές – Ελλείψεις

Η ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου καλύπτει και την περίπτωση των κωνικών τομών, όταν αυτές δίνονται παραμετρικά. Εδώ θα ακολουθήσουμε μία εναλλακτική προσέγγιση χρησιμοποιώντας την διγραμμική μορφή και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Πριν υπολογίσουμε την απόσταση σημείου από έλλειψη, αξίζει να αναφέρουμε μία ενδιαφέρουσα γεωμετρική ιδιότητα που αφορά την *εξειλιγμένη (evolute)* της έλλειψης. Η εξειλιγμένη μίας καμπύλης ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων καμπυλότητας κάθε σημείου της καμπύλης (δείτε π.χ. την [41]). Δηλαδή, κάθε σημείο της εξειλιγμένης, αποτελεί κέντρο κύκλου ο οποίος όχι μόνο εφάπτεται στην καμπύλη, αλλά έχει και την ίδια καμπυλότητα στο σημείο επαφής. Η εξειλιγμένη μίας καμπύλης που δίνεται σε παραμετρική μορφή, μπορεί να γραφεί και αυτή σε παραμετρική μορφή. Απαλείφοντας την παράμετρο μπορούμε να βρούμε και μία πεπλεγμένη μορφή. Στην περίπτωση ελλείψεων τόσο τα πολυώνυμα της παραμετρικής μορφής της εξειλιγμένης, όσο και η πεπλεγμένη μορφή, είναι (συνολικού) βαθμού 6.

Θεωρούμε ένα σημείο  $q$  του επιπέδου· από αυτό μπορούμε να φέρουμε έως και τέσσερις κάθετους στην έλλειψη (σχ. 2.4 αριστερά) αναλόγως με τη θέση του ως προς την εξειλιγμένη, η οποία είναι ένα αστροειδές (σχ. 2.4 δεξιά). Υπάρχουν τέσσερις κάθετοι όταν το  $q$  βρίσκεται εντός της εξειλιγμένης, τρεις κάθετοι όταν αυτό βρίσκεται επί της εξειλιγμένης, αλλά όχι σε σημείο ανάκαμψης (cusp), και δύο κάθετοι όταν



**Σχήμα 2.4:** Αριστερά: τέσσερις κάθετοι στην έλλειψη Δεξιά: Η εξειλιγμένη της έλλειψης.

το  $q$  είναι σημείο ανάκαμψης είτε βρίσκεται εκτός της εξειλιγμένης [42].

Θεωρούμε μια έλλειψη  $E$  της μορφής (2.3) και ένα εξωτερικό σημείο  $q = (q_1, q_2)$ . Συμβολίζουμε με  $C(q, \sqrt{s})$  έναν κύκλο με κέντρο  $q$  και ακτίνα ίση με  $\sqrt{s}$ ,  $s > 0$ .

Αν  $E$  και  $C$  οι πίνακες της διγραμμικής μορφής των  $E$  και  $C$ , τότε

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ -v_1 & -v_2 & v_1^2 + v_2^2 - s \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της δέσμης των  $E$  και  $C$  ισούται με

$$|\lambda \mathbf{E} + \mathbf{C}(s)| = J_2^2 \lambda^3 + c_2(s) \lambda^2 + c_1(s) \lambda + s, \quad (2.8)$$

όπου τα  $J_1, J_2$  ορίζονται στην (2.5) και

$$\begin{aligned} c_1(s) &= J_1 s - E(v_1, v_2), \\ c_2(s) &= J_2 s - T(v_1, v_2), \\ T(v_1, v_2) &= J_2 [(v_1 - x_c)^2 + (v_2 - y_c)^2 - J_1]. \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα  $\Delta(s)$  του  $\phi(\lambda)$  ισούται με:

$$\begin{aligned} &J_2^2 (J_1^2 - 4J_2) s^4 + 2J_2 (9J_1 J_2^2 - J_1^2 T + 6J_2 T - 2J_1^3 J_2 - J_1 J_2 E) s^3 + \\ &(-18J_2^3 E + 4J_1 J_2 E T - 27J_2^4 + J_1^2 T^2 - 18J_1 J_2^2 T + J_2^2 E^2 + 12J_1^2 J_2^2 E - 12J_2 T^2) s^2 + \\ &2(2T^3 - J_1 E T^2 - 6J_1 J_2^2 E^2 + 9J_2^2 E T - J_2 E^2 T) s + E^2 (T^2 + 4J_2^2 E), \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου  $E = E(q_1, q_2)$  (η εξίσωση της έλλειψης αποτιμημένη στο  $q$ ) και  $T = T(q_1, q_2)$ . Παρατηρείστε ότι το  $T$  εκφράζει έναν κύκλο με κέντρο το κέντρο της  $E$  και τετράγωνο ακτίνας  $J_1$ . Ένας κύκλος εφάπτεται εξωτερικά σε μία έλλειψη αν και μόνο αν το  $\varphi(\lambda)$  έχει μία διπλή θετική ρίζα [38, 39]. Όταν η διακρίνουσα  $\Delta$  μηδενίζεται, τότε το  $\varphi(\lambda)$  έχει πολλαπλή ρίζα. Παρατηρούμε από την (2.9), ότι το  $\Delta(s)$  είναι ένα πολυώνυμο ως προς  $s$  βαθμού 4. Επομένως, η απόσταση  $\delta(q, E)$  ισούται κατ' απόλυτο τιμή με την τετραγωνική ρίζα της μικρότερης θετικής ρίζας του  $\Delta(s)$ . Ο αλγεβρικός βαθμός των συντελεστών του  $\Delta(s)$ , ως προς  $q_1, q_2$  και τις παραμέτρους της  $E$ , είναι 6, 8, 10, 12, και 14 ως προς αύξουσες δυνάμεις του  $s$ . Αν θεωρήσουμε το  $\Delta(q_1, q_2, s)$  ως ένα πολυώνυμο τριών μεταβλητών, ο αλγεβρικός βαθμός των συντελεστών του, οι οποίοι είναι πολυώνυμα στους συντελεστές της  $E$ , είναι 6.

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

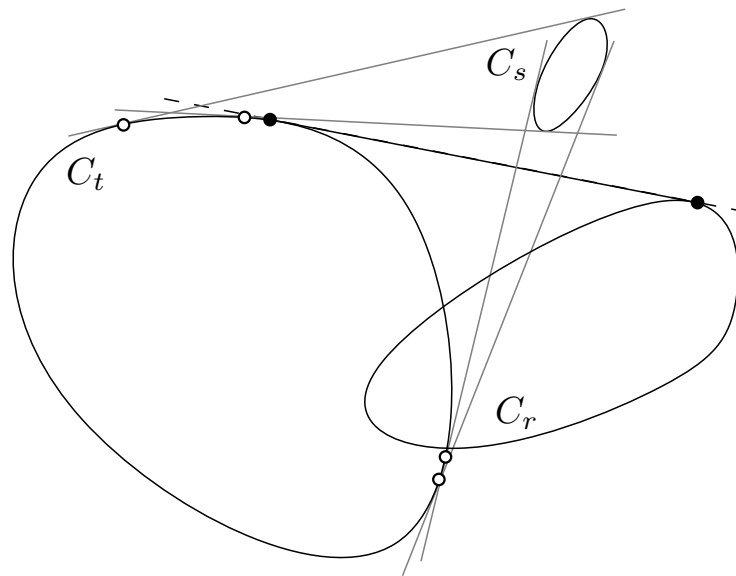
**Λήμμα 2.4.1** *Δοδισών δύο ελλειψεων  $E_1, E_2$  και ενός σημείου  $q$ , μπορούμε να αποφασίσουμε ποια έλλειψη βρίσκεται πλησιέστερα στο  $q$ , συγκρίνοντας δύο αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 4.*

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πολυώνυμο  $\Delta$  ταυτίζεται με το πολυώνυμο  $R$  που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι, το  $\Delta$  δεν έχει αρνητικές πραγματικές ρίζες και ο παραπάνω τρόπος σύγκρισης αποστάσεων δουλεύει και για σημεία εντός της έλλειψης.

Ως προς το βαθμό των εμπλεκόμενων αλγεβρικών αριθμών, ο βαθμός 4 μπορούμε να πούμε ότι είναι βέλτιστος, διότι στη χειρότερη περίπτωση από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μέχρι τέσσερις καθέτους στην έλλειψη και το πολυώνυμο, του οποίου οι ρίζες ισούνται με το τετράγωνο της απόστασης, είναι βαθμού 4.

## 2.5 Απόσταση από κοινή εφαπτομένη

Θεωρούμε δύο εστίες  $C_t$  και  $C_r$ , και τη CCW κοινή τους εφαπτομένη, η οποία αφήνει και τις δύο στη δεξιά πλευρά όταν κινούμαστε από το σημείο επαφής της  $C_t$  στο σημείο επαφής της  $C_r$ . Μια τέτοια εφαπτομένη φαίνεται στο σχήμα 2.5. Η ευθεία αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα και το κατηγορημα  $\text{DISTANCE-FROMBITANGENT}$  αποφασίζει αν μια τρίτη εστία  $C_s$  βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο ίδιο ημιεπίπεδο με τις δύο πρώτες. Χωρίζουμε το πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα:



**Σχήμα 2.5:** Υπολογισμός του `DISTANCEFROMBITANGENT`

Τον υπολογισμό της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης που μας ενδιαφέρει και το χαρακτηρισμό της σχετικής θέσης της τρίτης εστίας ως προς την εφαπτομένη αυτή.

Για τον υπολογισμό των κοινών εφαπτομένων των  $C_t$  και  $C_r$ , θεωρούμε το πολυώνυμο που ορίζεται από μία ευθεία που εφάπτεται στη  $C_t$  και ταυτόχρονα τέμνει τη  $C_r$ . Για να εφάπτεται η ευθεία αυτή και στις δύο εστίες, θα πρέπει η διακρίνουσα του αντίστοιχου πολυωνύμου να μηδενίζεται. Ανάμεσα στις πραγματικές ρίζες της διακρίνουσας βρίσκονται οι τιμές της παραμέτρου  $t$  που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής των ευθειών. Ο χαρακτηρισμός των ευθειών ως εξωτερικών ή εσωτερικών εφαπτομένων γίνεται εξετάζοντας τη σχετική θέση (ρητών) σημείων εσωτερικά των εστιών ως προς τις εφαπτομένες.

Για βρούμε τη σχετική θέση της  $C_s$  ως προς τη CCW κοινή εφαπτομένη, ελέγχουμε πρώτα αν η ευθεία αυτή τέμνει τη  $C_s$ . Σε αυτή την περίπτωση το κατηγορημα απαντάται αμέσως, καθώς η  $C_s$  δεν μπορεί να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με τις  $C_t$  και  $C_r$ . Αν η ευθεία δεν τέμνει τη  $C_s$ , τότε αρκεί να αποτιμήσουμε το πολυώνυμο της ευθείας σε ένα σημείο της  $C_s$ . Ωστόσο, υπάρχει καλύτερος τρόπος ο οποίος παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5. Θεωρούμε τα σημεία επαφής όλων των κοινών εφαπτομένων των  $C_t$  και  $C_s$ , τα οποία σημειώνονται με κυκλάκια. Στη συνέχεια αποφασίζουμε τη θέση της  $C_s$  από τη διάταξη των προαναφερθέντων σημείων και το σημείο επαφής της CCW εφαπτομένης στην  $C_t$ , το οποίο σημειώνεται με συμπαγές κυκλάκι στο ίδιο σχήμα.

Ας δούμε τώρα την πολυπλοκότητα των αλγεβρικών πράξεων που εμπλέκονται στον υπολογισμό του κατηγορήματος. Υπενθυμίζουμε ότι ο βαθμός των πολυωνύμων (αριθμητή και παρονομαστή) που ορίζουν τις καμπύλες είναι  $\leq d$  και το δυαδικό μήκος των συντελεστών  $\leq \tau$ . Έστω  $T_t(x, y, t)$  το πολυώνυμο της εφαπτομένης στη  $C_t$ . Για να υπολογίσουμε την τομή αυτής με τη  $C_r$ , αντικαθιστούμε τα  $x$  και  $y$  με τα  $X_r$  και  $Y_r$ , από τις εξισώσεις ορισμού της  $C_r$ . Απαλείφοντας τους παρονομαστές παίρνουμε ένα πολυώνυμο  $T_{tr}(t, r) \in \mathbb{Z}[r, t]$ , συνολικού βαθμού  $\leq 3d-2$  και δυαδικού μήκους  $\mathcal{L}(T_{tr}) \leq 3\tau + 3 \log(d)$ . Επιπλέον, ο βαθμός ως προς  $t$ , αντίστοιχα  $r$ , φράσσεται από το  $2d-2$ , αντίστοιχα  $d$ . Για να εφάπτεται η ευθεία και στις δύο εστίες, αρκεί να μηδενίζεται η διακρίνουσα του  $T_{tr}$  ως προς  $r$ ,  $\Lambda_{tr} \in \mathbb{Z}[t]$ . Η διακρίνουσα υπολογίζεται σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^4\tau)$ , και ισχύει ότι  $\text{dg}(\Lambda_{tr}) \leq 4(d-1)^2$  και  $\mathcal{L}(\Lambda_{tr}) = \mathcal{O}(d\tau)$  [40]. Οι πραγματικές ρίζες της διακρίνουσας, έστω  $\hat{t}$ , αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου  $t$  για τις οποίες η εφαπτομένη στη  $C_t$  είναι εφαπτομένη και της  $C_r$ . Οι πραγματικές ρίζες του  $\Lambda_{tr}(t)$  απομονώνονται σε χρόνο  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^{12} + d^{10}\tau^2)$  και τα άκρα των διαστημάτων απομόνωσης έχουν δυαδικό μήκος  $\mathcal{O}(d^4 + d^3\tau)$  [43].

Για το χαρακτηρισμό των κοινών εφαπτομένων ως εσωτερικές ή εξωτερικές, αρκεί ο χαρακτηρισμός μόνο δύο εξ αυτών, χάρη στην ακόλουθη ιδιότητα.

**Λήμμα 2.5.1** *Έστω  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  ρίζες του  $\Lambda_{tr}(t)$ . Έστω  $\mu$  μία εσωτερική κοινή εφαπτομένη και  $\epsilon$  μία εξωτερική. Τότε το διατεταγμένο σύνολο  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$  αντιστοιχεί σε μία κυκλική μετάθεση των  $(\mu\epsilon\mu)$ .*

**Απόδειξη.** Το κυρτό περίβλημα (ΚΠ) δύο εστιών περιφράσσεται από τις δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες τους. Τα σημεία επαφής των εσωτερικών εφαπτομένων βρίσκονται αναγκαστικά εντός του ΚΠ, διαφορετικά δε θα ήταν δυνατόν για μια ευθεία να εφάπτεται και στις δύο εστίες. Ξεκινώντας από την πρώτη εξωτερική εφαπτομένη κινούμαστε μέσω του τόξου εντός του ΚΠ και συναντάμε τα σημεία επαφής και των τεσσάρων κοινών εφαπτομένων με σειρά  $\epsilon, \mu, \mu, \epsilon$ . Ανάλογα με τη θέση του  $\infty$ -point της πρώτης εστίας ως προς το σημείο επαφής της πρώτης εξωτερικής εφαπτομένης, παίρνουμε διαφορετική κυκλική μετάθεση.  $\square$

Απομένει να βρούμε τη θέση της  $C_s$  ως προς τη CCW κοινή εφαπτομένη από τη διάταξη των σημείων επαφής που αναφέραμε προηγουμένως. Το σημείο επαφής της CCW εφαπτομένης αντιστοιχεί σε μία πραγματική ρίζα του  $\Lambda_{tr}(t)$ , ενώ τα σημεία επαφής των κοινών εφαπτομένων των  $C_t$  and  $C_s$ , αντιστοιχούν στις στις πραγματικές

ρίζες του  $\Lambda_{ts}(t)$ . Επομένως αρκεί να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις πραγματικές ρίζες αυτών των πολυωνύμων, κάτι που μπορεί να γίνει σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^6\tau + d^6\sigma)$  [40].

Συνολικά, το κατηγορημα υπολογίζεται σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(d^{12} + d^{10}\tau^2 + d^6\sigma)$  ή  $\tilde{\mathcal{O}}_B(N^{12})$ , όπου  $N = \max\{d, \sigma, \tau\}$ . Για κωνικές τομές,  $d = 2$ , οπότε το φράγμα εξαρτάται μόνο από το  $\tau$  και γίνεται  $\tilde{\mathcal{O}}_B(N^2)$ . Αυτό μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω, χρησιμοποιώντας εξειδικευμένους αλγορίθμους για μικρούς αλγεβρικούς αριθμούς, σε  $\tilde{\mathcal{O}}_B(N)$  [44].

Η μέθοδος υπολογισμού και χαρακτηρισμού των κοινών εφαπτομένων, εκτός από το διάγραμμα Voronoi κυρτών αντικειμένων, μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε προβλήματα υπολογισμού του γράφου ορατότητας καμπύλων αντικειμένων [45, 46], καθώς και σε προβλήματα υπολογισμού κυρτού περιβλήματος [47].

### 2.5.1 Κωνικές τομές – Ελλείψεις

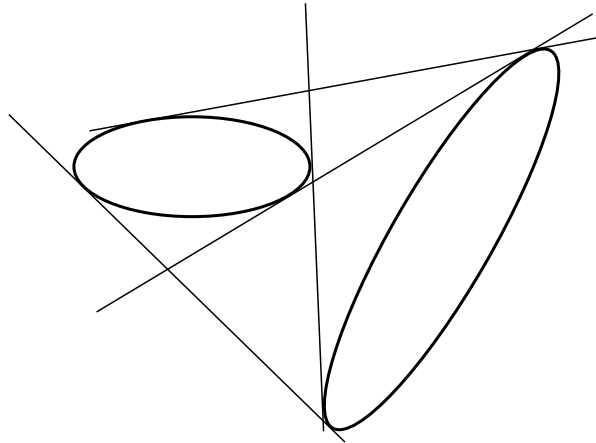
Στην περίπτωση των κωνικών τομών μπορούμε εναλλακτικά να δουλέψουμε με την πεπλεγμένη μορφή. Στην [48] προτείνεται ένας τρόπος προσδιορισμού του τύπου μίας εφαπτομένης χωρίς να χρειαστεί να υπολογιστούν όλες οι εφαπτομένες. Προκύπτει ότι η προτεινόμενη μέθοδος είναι ισοδύναμη με το να λύσουμε το πρόβλημα στον παραμετρικό χώρο, όπως παρουσιάστηκε στην αρχή της ενότητας 2.5. Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων επαφής, η προτεινόμενη μέθοδος χειρίζεται αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 4, όπως θα δείξουμε και εμείς στη συνέχεια.

Έστω η ευθεία  $L : y - ux - v$  και η έλλειψη  $E$  σε πεπλεγμένη μορφή, όπως στην (2.3). Τα κοινά σημεία των  $L$  και  $E$  αντιστοιχούν στις λύσεις του συστήματος  $L(x, y) = E(x, y) = 0$ . Επειδή το πολυώνυμο  $L(x, y)$  είναι γραμμικό ως προς  $x$  και  $y$ , το επιλύουμε ως προς  $y$  και αντικαθιστούμε στην  $E(x, y)$ , παίρνοντας τελικά

$$R(x) := (2bu + a + cu^2)x^2 + (2cnu + 2d + 2eu + 2bv)x + f + cv^2 + 2ev.$$

Παρατηρείστε ότι το  $R$  είναι η απαλοιφούσα του συστήματος  $L(x, y) = E(x, y) = 0$  ως προς  $y$ . Οι ρίζες του  $R(x)$  είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των  $L$  και  $E$ . Επειδή οι  $L$  και  $E$  μπορεί να έχουν μέχρι 2 κοινά σημεία, για να εφάπτεται η  $L$  στην  $E$ , το σημείο επαφής θα πρέπει να είναι πολλαπλότητας 2, δηλαδή το  $R(x)$  να έχει διπλή ρίζα, επομένως η διακρίνουσα του  $R$ :  $\Lambda(u, v) = (e^2 - cf)u^2 + 2(cd - be)uv + (b^2 - ac)v^2 + 2(de - bf)u + 2(bd - ae)v - af + d^2$  θα πρέπει να μηδενίζεται.

Θεωρούμε τώρα δύο ελλείψεις  $E_1$  και  $E_2$ . Οι κοινές τους εφαπτομένες μπορούν



**Σχήμα 2.6:** Οι τέσσερις κοινές εφαπτομένες δύο ελλείψεων, δύο εξωτερικές και δύο εσωτερικές

να περιγραφούν από το παρακάτω σύστημα:

$$\Lambda_1(u, v) = \Lambda_2(u, v) = 0, \tag{2.10}$$

όπου  $\Lambda_1 = 0$  (αντίστοιχα  $\Lambda_2 = 0$ ), εκφράζει το γεγονός ότι η ευθεία  $L$  εφάπτεται στην  $E_1$  (αντίστοιχα  $E_2$ ). Το σύστημα έχει συνολικό βαθμό 2, μπορεί να λυθεί σε  $\mathcal{O}(1)$  [44] και οι ρίζες του είναι ζεύγη αλγεβρικών αριθμών βαθμού το πολύ 4. Υπάρχουν το πολύ 4 πραγματικές ρίζες που αντιστοιχούν στις 4 κοινές εφαπτομένες (βλ. σχήμα 2.6).

Απομένει να χαρακτηρίσουμε τις κοινές εφαπτομένες, ως εσωτερικές ή εξωτερικές. Μία κοινή εφαπτομένη είναι εξωτερική αν και μόνο αν η αποτίμηση της εξίσωσης της στο κέντρο κάθε έλλειψης δίνει το ίδιο πρόσημο. Έστω  $\bar{L} : y - \bar{u}x - \bar{v}$ , μία κοινή εφαπτομένη, όπου  $(\bar{u}, \bar{v})$  λύση του (2.10) και  $(x_{c_1}, y_{c_1}), (x_{c_2}, y_{c_2})$  τα (ρητά) κέντρα των  $E_1, E_2$  αντίστοιχα. Η  $\bar{L}$  είναι εξωτερική κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν  $\text{sign}(\bar{L}(x_{c_1}, y_{c_1})) \cdot \text{sign}(\bar{L}(x_{c_2}, y_{c_2})) > 0$ . Ο υπολογισμός των προσημών γίνεται σε σταθερό χρόνο  $\mathcal{O}(1)$  [44]. Μια κατακόρυφη εφαπτομένη δίνει απλούστερο σύστημα αντίστοιχο του (2.10) (μίας μεταβλητής) και έτσι ο χειρισμός αυτής της περίπτωσης γίνεται ευκολότερα.

Τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο DISTANCEFROMBITANGENT ως εξής: Δοθείσας μιας εξωτερικής εφαπτομένης  $\bar{L} : y = \bar{u}x + \bar{v}$ , προδιορίζουμε τη σχετική θέση της τρίτης έλλειψης  $E_3$  ως προς την εφαπτομένη αυτή αποτιμώντας τη διακρίνουσα των  $\bar{L}$  και  $E_3$ , υπολογίζοντας δηλαδή το  $\Lambda_3(\bar{u}, \bar{v})$ . Το  $\Lambda_3$  είναι αρνητικό, μηδέν ή θετικό αν και μόνο αν η  $E_3$  έχει μηδέν, ένα ή δύο κοινά σημεία με την  $\bar{L}$  αντίστοιχα. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, το πρόσημο της  $\bar{L}(x, y)$ , όταν αυτή αποτιμηθεί στο κέντρο



της  $E_3$ , δίνει την πλευρά της  $\bar{L}$  στην οποία βρίσκεται η  $E_3$ .

Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί περιλαμβάνουν αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού το πολύ 4. Μπορούμε να πούμε ότι το 4 είναι βέλτιστο ως προς το βαθμό των εμπλεκόμενων αλγεβρικών αριθμών, μιας και υπάρχουν το πολύ 4 κοινές εφαπτομένες.

Τελικά βλέπουμε ότι στην περίπτωση ελλείψεων, τόσο η παραμετρική όσο και η πεπλεγμένη μορφή οδηγούν στην ίδια αλγεβρική πολυπλοκότητα, διότι και με τις δύο προσεγγίσεις χειριζόμαστε αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 4. Ωστόσο, στην παραμετρική μορφή μπορούμε ευκολότερα να προσδιορίσουμε τον τύπο μίας εφαπτομένης γι' αυτό και επιλέγουμε να δουλέψουμε με αυτή στην υλοποίησή μας. Επίσης, ο υπολογισμός των σημείων επαφής (ως τιμές παραμέτρου) θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος και στον υπολογισμό του κατηγορήματος INCIRCLE.

## 2.6 Κύκλος Voronoi τριών ελλείψεων

Σε αυτή την ενότητα θα επιχειρήσουμε μία εισαγωγή στο κατηγορήμα INCIRCLE μελετώντας τον κύκλο Voronoi τριών ελλείψεων. Πιο συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε τους τριεφαπτόμενους κύκλους με ένα αλγεβρικό σύστημα και θα υπολογίσουμε το πλήθος μιγαδικών λύσεων του συστήματος αυτού, χρησιμοποιώντας τεχνικές από την αλγεβρική γεωμετρία. Αυτό θα μας δώσει μια πρώτη εικόνα για τη «δυσκολία» υπολογισμού του INCIRCLE, το οποίο θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Έστω  $\sqrt{s}$  η ακτίνα του τριεφαπτόμενου κύκλου και  $(v_1, v_2)$  το κέντρο του. Για καθεμία έλλειψη θεωρούμε τη διακρίνουσα, όπως στο (2.9), και παίρνουμε το σύστημα

$$\Delta_1(v_1, v_2, s) = \Delta_2(v_1, v_2, s) = \Delta_3(v_1, v_2, s) = 0. \quad (2.11)$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω λήμμα:

**Λήμμα 2.6.1** *Μία λύση  $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{s})$  του (2.11) αντιστοιχεί σε έναν εξωτερικό (αντίστοιχα εσωτερικό) τριεφαπτόμενο κύκλο αν και μόνο αν το  $\hat{s}$  είναι η μικρότερη δετική ρίζα όλων των  $\Delta_i(\hat{v}_1, \hat{v}_2, s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  και το  $(v_1, v_2)$  δεν ανήκει στο εσωτερικό καμίας έλλειψης (αντίστοιχα ανήκει στην τομή και των τριών ελλείψεων).*

Έστω ότι το  $(v_1, v_2)$  δε βρίσκεται στο εσωτερικό της τέταρτης έλλειψης. Τότε μπορούμε να αποφασίσουμε αν το  $(v_1, v_2)$  βρίσκεται σε διένεξη με μια τέταρτη έλλειψη ως εξής:

**Λήμμα 2.6.2** Αν  $s_0^-, s_0^+$  είναι η μικρότερη και μεγαλύτερη, αντίστοιχα, δευτική ρίζα του  $\Delta_0(\hat{v}_1, \hat{v}_2, s)$ , όπου  $\Delta_0$  αντιστοιχεί στην (τέταρτη) έλλειψη προς εξέταση, τότε:

- $\hat{s} \leq s_0^- \Leftrightarrow$  η τέταρτη έλλειψη βρίσκεται εκτός του κύκλου και εφάπτεται σ' αυτόν αν και μόνο αν  $\hat{s} = s_0^-$ .
- $\hat{s} \in (s_0^-, s_0^+) \Leftrightarrow$  η τέταρτη έλλειψη τέμνει τον κύκλο.
- $\hat{s} \geq s_0^+ \Leftrightarrow$  η τέταρτη έλλειψη βρίσκεται μέσα στον κύκλο και εφάπτεται σ' αυτόν αν και μόνο αν  $\hat{s} = s_0^+$ .

Ανάλογο λήμμα ισχύει και για την περίπτωση που το  $(v_1, v_2)$  βρίσκεται εντός της τέταρτης έλλειψης.

Με το παραπάνω λήμμα μπορούμε να απαντήσουμε στο κατηγορημα InCIRCLE (να διαπιστώσουμε δηλαδή διένεξη κορυφής). Ωστόσο απαιτούνται αλγεβρικά εργαλεία για τα οποία δεν υπάρχει επαρκώς αποτελεσματική και ακριβής υλοποίηση μέχρι σήμερα. Αυτό θα φανεί και στη συνέχεια όπου θα εξετάσουμε την αλγεβρική πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Ο μικτός όγκος του συστήματος (2.11), όπως υπολογίζεται με το PRCRACK [49] είναι 256 και για να τον μειώσουμε, εισάγουμε μια νέα μεταβλητή  $q$ :

$$q = v_1^2 + v_2^2 - s. \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας το  $s$  με το  $q$  στην (2.11) και προσθέτοντας την (2.12) παίρνουμε

$$\Delta_1(v_1, v_2, q) = \Delta_2(v_1, v_2, q) = \Delta_3(v_1, v_2, q) = q - v_1^2 - v_2^2 + s = 0 \quad (2.13)$$

με αγνώστους τα  $v_1, v_2, q$  και  $s$ , το οποίο έχει μικτό όγκο 184. Αν αγνοήσουμε την τελευταία εξίσωση και την μεταβλητή  $s$ , ο μικτός όγκος είναι και πάλι 184. Απαλείφοντας τα  $v_1, v_2$  από τις τρεις πρώτες εξισώσεις στην (2.13), βρίσκουμε την απαλοίφουσα σαν ένα πολυώνυμο βαθμού 184 ως προς  $q$  [32].

Κάθε  $\Delta_i$  είναι η διακρίνουσα του  $\varphi_i$  το οποίο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της έλλειψης  $i$  και του κύκλου Voronoi, βλ. (2.7). Ο μηδενισμός του  $\Delta_i$  σημαίνει ότι το  $\varphi_i$  έχει πολλαπλή ρίζα ή ότι τα  $\varphi_i$  και  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \varphi_i$  έχουν κοινή ρίζα,  $i = 1, 2, 3$ . Έτσι ένα ισοδύναμο σύστημα με το (2.13) είναι το

$$\varphi_i(v_1, v_2, q, \lambda_i) = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \varphi_i(v_1, v_2, q, \lambda_i) = 0, \quad \text{για } i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

που περιέχει τρεις εξισώσεις συνολικού βαθμού 3 και τρεις εξισώσεις συνολικού βαθμού 2. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και ο αριθμός των αγνώστων αυξήθηκε, το δυαδικό μέγεθος των συντελεστών είναι μικρότερο από αυτό της (2.13). Επιπλέον, ο μικτός όγκος βρίσκουμε ότι παραμένει ο ίδιος.

**Θεώρημα 2.6.3** *Τρεις ελλείψεις επιδέχονται το πολύ 184 μιγαδικούς τριεφαπτόμενους κύκλους. Το φράγμα αυτό είναι σφιχτό διότι υπάρχουν τριάδες με 184 μιγαδικές λύσεις.*

Η σφιχτότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο μικτός όγκος παρέχει ένα άνω φράγμα και το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα παράδειγμα για το οποίο υπολογίσαμε την απαλοίφουσα βαθμού 184, παίρνοντας έτσι ένα κάτω φράγμα. Το θεώρημα ισχύει και για οποιαδήποτε τριάδα κωνικών τομών.

Στην περίπτωση τριών κύκλων, το πλήθος των μιγαδικών τριεφαπτόμενων κύκλων είναι 8, και μπορούν όλοι τους να είναι πραγματικοί (βλ. ενότητα 3.4.3). Για να τους βρούμε, χρειάζεται να χειριστούμε αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 2. Στην περίπτωση ελλείψεων, παραμένει ανοιχτό το ερώτημα πόσοι από τους 184 μιγαδικούς κύκλους μπορεί να είναι πραγματικοί. Λύνοντας το σύστημα (2.14) αριθμητικά με το PHSACK για 3 μη τεμνόμενες ελλείψεις ( $475x^2 + 1300xy + 1225y^2 - 6050x - 8946y + 17995$ ,  $267x^2 - 730xy + 689y^2 + 2164x - 3528y + 4305$ ,  $53x^2 + 166xy + 892y^2 + 282x + 3484y + 3013$ ), βρήκαμε μέχρι 22 πραγματικές ρίζες, ενώ το συνολικό πλήθος μιγαδικών ριζών ήταν 184. Στην περίπτωση τεμνόμενων ελλείψεων (όχι απαραίτητα ψευδοκύκλων) έχουμε βρει μέχρι 76 πραγματικές ρίζες (π.χ.  $37089x^2 - 138000xy + 129664y^2 + 350178x - 656656y + 757761$ ,  $208x^2 + 552xy + 369y^2 - 2768x - 3684y + 8896$ ,  $363485025x^2 + 10351357800xy + 129496590736y^2 - 36956722350x - 916827492952y + 1582894467441$ ). Στο ίδιο νούμερο έχουν καταλήξει και στην [50]. Υπάρχει επίσης μια κατασκευή [51] όπου τρεις κωνικές τομές (όχι όλες ελλείψεις) επιδέχονται 136 τριεφαπτόμενους κύκλους.

Αν και τα συστήματα (2.13) και (2.14) έχουν βέλτιστο μικτό όγκο, η επίλυσή τους αποτελεί πολύ δύσκολο υπολογιστικό πρόβλημα ακόμα και με αριθμητικές μεθόδους, πόσο μάλλον με ακριβείς. Για να δείξουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος, λύσαμε το σύστημα (2.14) με το PHSACK [49] το οποίο χρησιμοποιεί μεθόδους ομοιοπίας και αποτελεί ό,τι πιο προηγμένο στην αριθμητική επίλυση πολυωνυμικών συστημάτων. Για ελλείψεις με συντελεστές πεπλεγμένης μορφής 30 και 100 bit, οι χρόνοι του PHSACK ήταν 23,85 και 38,36 sec αντίστοιχα σε έναν Pentium-4

2.6GHz (το δυαδικό μέγεθος των συντελεστών δεν περιμένουμε να αλλάξει σημαντικά το χρόνο εκτέλεσης, μιας και το πρόγραμμα χρησιμοποιεί αριθμητική κινητής υποδιαστολής). Στην [23] αναφέρεται ότι ο χρόνος για την επίλυση ενός συστήματος που περιγράφει τον κύκλο Voronoi είναι μερικά λεπτά χρησιμοποιώντας αραιές απαλοίφουσες. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το iCOs [52] που χρησιμοποιεί αριθμητική διαστημάτων για το σύστημα των  $\Delta_i$ 's με συντελεστές 60 bit. Εντοπίζει μια εκφυλισμένη περίπτωση για το INCIRCLE (τέσσερις ελλείψεις εξωτερικά εφαπτόμενες στον ίδιο κύκλο) σε περίπου 213 δευτερόλεπτα σε έναν Pentium-3 1GHz. Στη συνέχεια με κάποια πρωταρχικά πειράματα [53] χρησιμοποιώντας βάσεις Gröbner, μπόρεσαμε να απομονώσουμε όλες τις πραγματικές ρίζες του συστήματος σε δύο λεπτά περίπου με το λογισμικό GB-Rs [54].

Σημειώστε ότι γενικά, το να λύσουμε το σύστημα (2.13) ή (2.14) δεν αρκεί για να απαντήσουμε το κατηγορηματικό INCIRCLE, καθώς θα πρέπει να εφαρμόσουμε και το λήμμα 2.6.1. Ωστόσο αυτή η μοντελοποίηση είναι χρήσιμη γιατί το σύστημα (2.13) έχει βέλτιστο μικτό όγκο και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε κάποιο φράγμα δυαδικής πολυπλοκότητας για το κατηγορηματικό.

## Κεφάλαιο 3

# Κύκλος Voronoi και διένεξη κορυφής

Ένας κύκλος Voronoi έχει κέντρο μία κορυφή Voronoi και ακτίνα ίση κατ' απόλυτο τιμή με την απόσταση της κορυφής από τις πλησιέστερες εστίες σε αυτή. Αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος Voronoi εφάπτεται στις εστίες.

Δοθεισών των εστιών  $C_t$ ,  $C_r$ ,  $C_s$ , το κατηγορημα `INCIRCLE` αποφασίζει αν η νεοεισαχθείσα εστία  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$  (τον κύκλο Voronoi των τριών εστιών με θετική φορά των σημείων επαφής). Εδώ μπορεί να προκύψει και η εκφυλισμένη περίπτωση η εστία  $C_h$  να εφάπτεται και αυτή στον  $V_{trs}$ . Υποθέτοντας ότι ο  $V_{trs}$  υπάρχει, το κατηγορημα υπολογίζεται ως εξής:

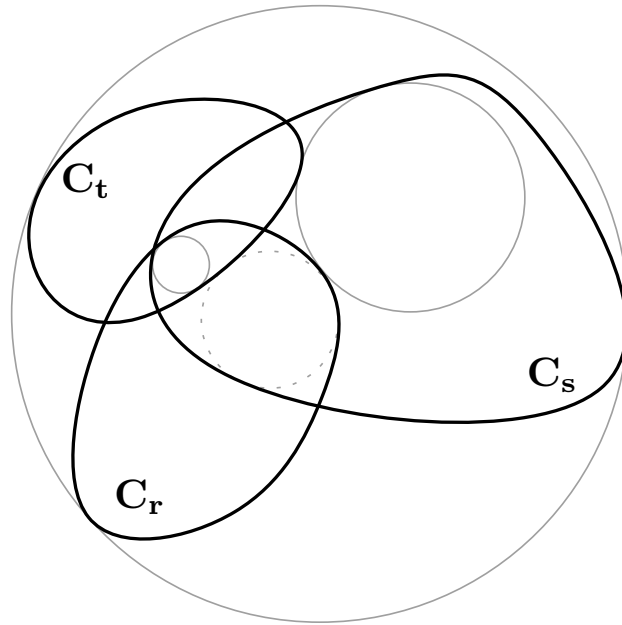
(i) Επίλυση του αλγεβρικού συστήματος που εκφράζει τον κύκλο Voronoi. Εντοπισμός του  $V_{trs}$  ανάμεσα στις λύσεις του συστήματος, οι οποίες γενικά αντιστοιχούν σε διάφορους τριεφαπτόμενους κύκλους (βλ. σχήμα 3.1).

(ii) Υπολογισμός της σχετικής θέσης της  $C_h$  ως προς τον  $V_{trs}$ .

Στις ενότητες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες του κύκλου Voronoi, οι οποίες θα μας επιτρέψουν να υπολογίσουμε αποτελεσματικά το `INCIRCLE`.

### 3.1 Διεφαπτόμενος κύκλος

Θεωρούμε δύο εστίες  $C_t$ ,  $C_r$  και ένα σημείο  $q(x, y)$  πάνω στη διχοτόμο καμπύλη τους. Έστω οι προβολές του  $q$  πάνω στις εστίες  $C_t$  και  $C_r$ , οι οποίες αντιστοιχούν

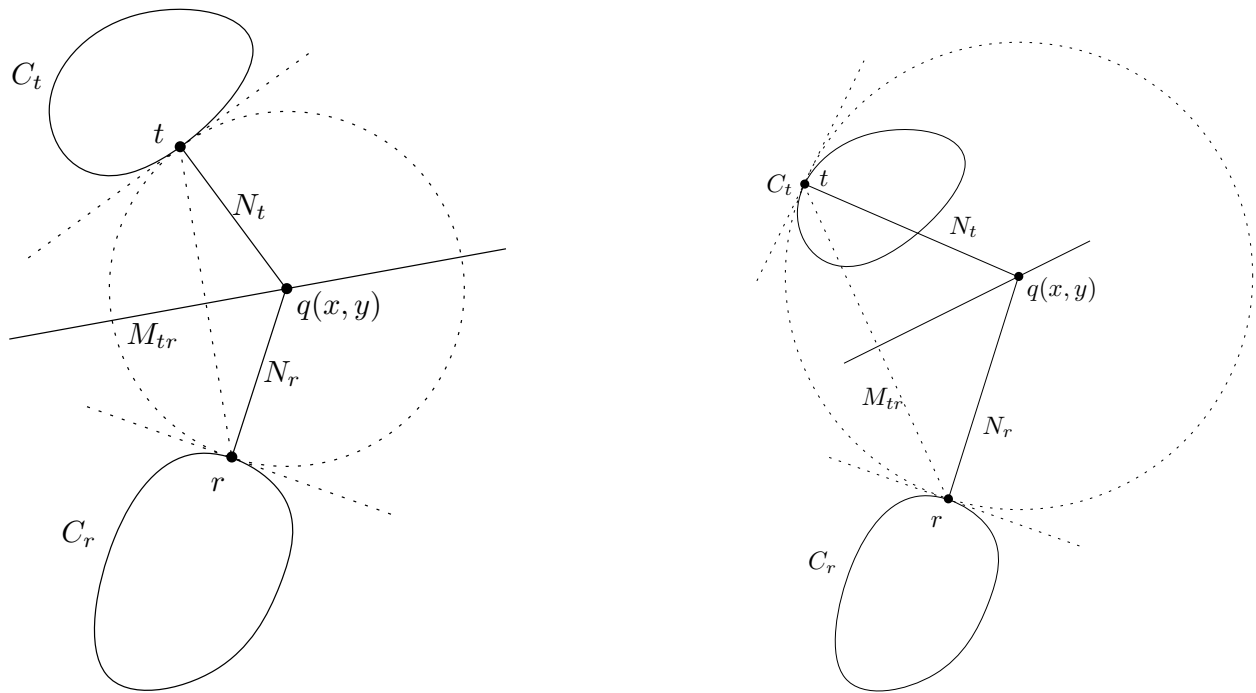


**Σχήμα 3.1:** Διάφοροι τριεφαπτόμενοι κύκλοι τριών εστιών ( $C_t, C_r, C_s$ ). Συμπαγής γραμμή: Θετική φορά των σημείων επαφής. Διακεκομμένη γραμμή: Αρνητική φορά

σε κάποια τιμή των παραμέτρων  $t$  και  $r$  των καμπυλών. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} N_t(x, y, t) &= 0 \\ N_r(x, y, r) &= 0 \\ M_{tr}(x, y, t, r) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου  $N_t$  και  $N_r$  οι κάθετες στις εστίες που περνάνε από το  $q$ , όπως ορίστηκαν στην ενότητα 2.2.2 και το  $M_{tr}$  προκύπτει από τη σχέση  $(x - X_t)^2 + (y - Y_t)^2 = (x - X_r)^2 + (y - Y_r)^2$ , αφού απαλείψουμε τους παρονομαστές, και είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τις προβολές του  $q$  στις εστίες (μιας και το  $q$  ισαπέχει από τις εστίες), όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 αριστερά. Για να είναι το (γραμμικό ως προς  $x, y$ ) σύστημα (3.1) συμβιβαστό, θα πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα του αντίστοιχου επαυξημένου πίνακα. Έτσι, απαλοίφοντας τα  $x, y$  παίρνουμε ένα πολώνυμο  $B(t, r)$  δύο μεταβλητών βαθμού  $\leq 4d - 2$  στην καθεμία, αφού διώξουμε και τους πλεονάζοντες όρους που αντιστοιχούν στο μηδενισμό του παρονομαστή των παραμετρικών καμπυλών, όπως αναλύεται στην [55]. Η αλγεβρική καμπύλη  $B(t, r)$  περιέχει και σημεία που είναι λύσεις του (3.1) τα οποία όμως δεν αντιστοιχούν στη μικρότερη απόσταση (η έννοια « μικρότερη » δεν μπορεί να περιγραφεί αλγεβρικά), είτε δεν ισαπέχουν (λόγω διαφορετικού προσήμου), σύμφωνα με τον ορισμό 1.1.1,



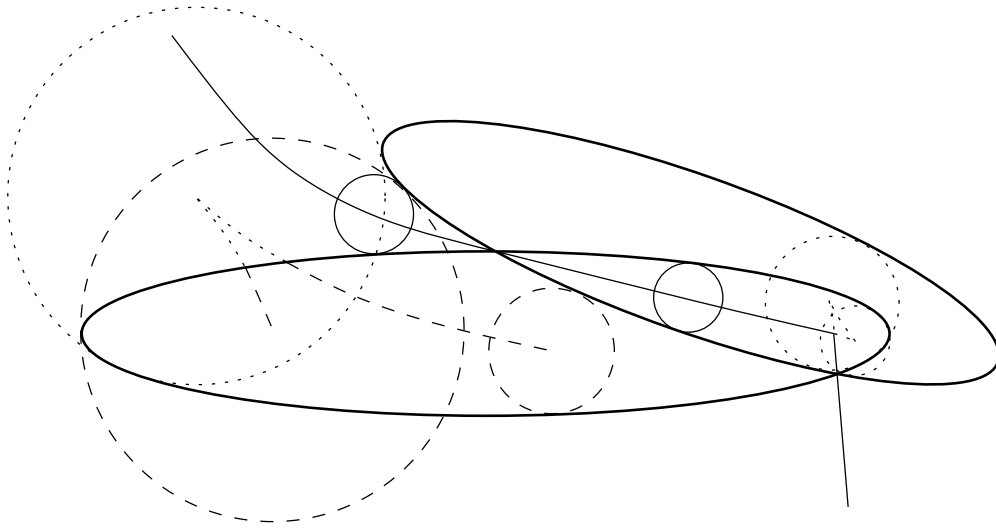
**Σχήμα 3.2:** Αριστερά: Ορισμός ενός σημείου  $q(x, y)$  της διχοτόμου καμπύλης. Δεξιά ένα σημείο  $q(x, y)$  το οποίο δεν αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση

όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 δεξιά, και στο σχήμα 3.3. Αυτά μπορούμε να τα απορρίψουμε εκμεταλλευόμενοι κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες που παρουσιάζονται στη συνέχεια. Το γεγονός ότι υπολογίσαμε την καμπύλη της διχοτόμου στον παραμετρικό χώρο και όχι στον καρτεσιανό, μας επιτρέπει να δουλεύουμε με πολυώνυμα μικρότερου βαθμού. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στην [55] μια εκτενέστερη ανάλυση των διχοτόμων παραμετρικών καμπυλών.

Στην περίπτωση ελλείψεων, η διχοτόμος καμπύλη  $B(t, r)$  είναι συνολικού βαθμού 12, 6 σε κάθε παράμετρο. Στο καρτεσιανό επίπεδο, μπορούμε να δούμε ότι η πεπλεγμένη μορφή είναι βαθμού 28, τόσο συνολικά όσο και ως προς κάθε παράμετρο.

Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή  $t$  της  $B(t, r)$  με μία συγκεκριμένη τιμή, παίρνουμε ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής βαθμού  $\leq 4d - 2$ .

**Πόρισμα 3.1.1** Δοδισών δύο εστιών βαθμού  $d$  και ενός σημείου πάνω στην πρώτη, μπορεί να υπάρχουν μέχρι  $4d - 2$  πραγματικοί διεφαπτόμενοι κύκλοι που να εφάπτονται στο συγκεκριμένο σημείο της πρώτης εστίας. Το φράγμα αυτό είναι σφιχτό και ίσο με 6 στην περίπτωση που οι εστίες είναι ελλείψεις (βλ. σχήμα 3.4).

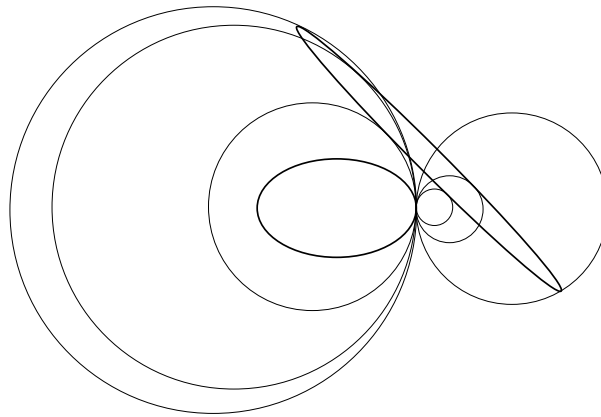


**Σχήμα 3.3:** Συμπαγής γραμμή: Διεφαπτόμενοι κύκλοι και διχοτόμος καμπύλη ελλείψεων. Διακεκομμένη γραμμή: Διεφαπτόμενοι κύκλοι των οποίων τα κέντρα παραβιάζουν το κριτήριο της μικρότερης απόστασης (γραμμή με τελείες), είτε παραβιάζουν το κριτήριο της ίσης απόστασης (γραμμή με παύλες), ωστόσο τα σημεία επαφής ικανοποιούν την αλγεβρική εξίσωση  $B(t, r)$

Από τους διεφαπτόμενους κύκλους, το πολύ ένας μπορεί να είναι *εξωτερικός* και στις δύο εστίες, και το πολύ ένας μπορεί να είναι *εσωτερικός* σ' αυτές (όταν τέμνονται). Έτσι, το πολύ ένας από αυτούς ισούται με τον Απολλώνιο κύκλο των δύο εστιών που ορίσαμε στην ενότητα 1.1, π.χ. ο τρίτος κύκλος από δεξιά (ταξινομώντας ως προς την τετμημένη των κέντρων τους) στο σχήμα 3.4. Υπενθυμίζουμε ότι μόνο τα κέντρα Απολλώνιων κύκλων συνεισφέρουν στο διάγραμμα Voronoi. Το κέντρο ενός τέτοιου κύκλου ανήκει στη διχοτόμο καμπύλη των δύο εστιών που εφάπτονται στον κύκλο, και ένα υποσύνολο αυτής της καμπύλης αποτελεί ακμή του διαγράμματος Voronoi των εστιών. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}_{tr}(\hat{t}, \hat{r})$  τον Απολλώνιο κύκλο των  $C_t$  και  $C_r$  που εφάπτεται στα σημεία  $\hat{t}$  και  $\hat{r}$  αντίστοιχα. Επειδή το  $\hat{r}$  εξαρτάται από το  $\hat{t}$ , μπορούμε να παραλείψουμε το  $\hat{r}$  και να γράφουμε μόνο  $\mathcal{A}_{tr}(\hat{t})$ .

**Λήμμα 3.1.2** *Έστω δύο εστίες  $C_t$  και  $C_r$  που έχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες, ΚΠ το κυρτό τους περίβλημα και  $\tau$  το τόξο της  $C_t$  με άκρα τα σημεία επαφής των εξωτερικών εφαπτομένων των  $C_t, C_r$  στο οποίο περιέχονται και σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του ΚΠ (και όχι μόνο στο σύνορό του). Έστω  $\hat{t} \in C_t$ . Αν  $\hat{t} \notin \tau$  τότε δεν υπάρχει ο Απολλώνιος κύκλος των  $C_t$  και  $C_r$ . Αλλιώς, αν το  $\hat{t}$  συμπίπτει με άκρο του  $\tau$ , τότε ο Απολλώνιος κύκλος εκφυλίζεται σε εξωτερική εφαπτομένη. Διαφορετικά, αν*





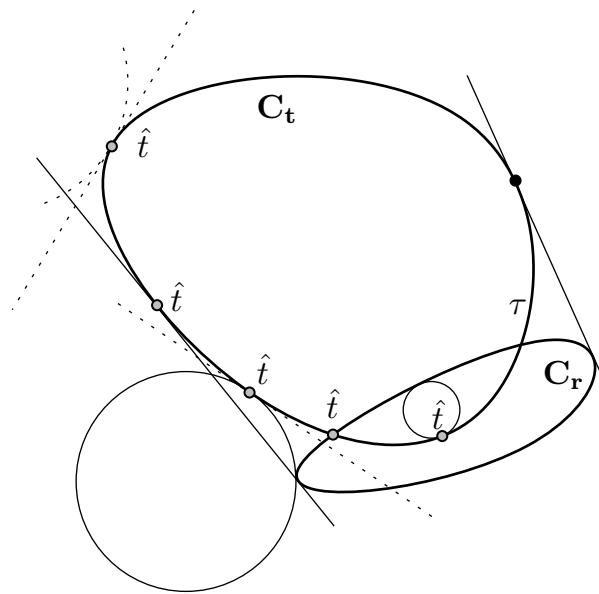
**Σχήμα 3.4:** Οι έξι διεφαπτόμενοι κύκλοι: Ο Απολλώνιος κύκλος είναι ο τρίτος από δεξιά

$\hat{t} \notin C_t \cap C_r$ , τότε υπάρχει εξωτερικός Απολλώνιος κύκλος. Διαφορετικά, αν  $\hat{t} \in C_t \cap C_r$  (τομή συνόρων), τότε ο Απολλώνιος κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο τομής. Τέλος, αν  $\hat{t} \in \tau$ , τότε ο Απολλώνιος κύκλος, αν υπάρχει, είναι εσωτερικός.

**Απόδειξη.** Δείτε το σχήμα 3.5. i)  $\hat{t} \notin C_t \cap C_r$ . Αφού το  $\hat{t}$  δεν ανήκει στην τομή των εστιών, ο Απολλώνιος κύκλος, αν υπάρχει, θα είναι εξωτερικός. Όταν  $\hat{t} \notin \tau$ , τότε η εφαπτομένη στο  $\hat{t}$  αφήνει την  $C_r$  και κάθε εξωτερικό εφαπτόμενο κύκλο στο  $\hat{t}$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα, άρα δεν είναι δυνατόν αυτός να εφάπτεται και στην  $C_t$ . Όταν το  $\hat{t}$  συμπίπτει με άκτρο του  $\tau$ , τότε η εφαπτομένη στο  $\hat{t}$  είναι και εφαπτομένη της  $C_r$ , έτσι ο Απολλώνιος κύκλος εκφυλίζεται σε εξωτερική εφαπτομένη. Τέλος, όταν  $\hat{t} \in \tau$ , τότε η εφαπτομένη στο  $\hat{t}$  αφήνει την  $C_t$  και κάποια σημεία της  $C_r$  σε διαφορετικά ημιεπίπεδα (όταν οι εστίες δεν τέμνονται, ενδέχεται να αφήνει και ολόκληρη την  $C_r$  σε διαφορετικό ημιεπίπεδο). Υπάρχει επομένως κάποιος εξωτερικός εφαπτόμενος κύκλος στο  $\hat{t}$  ο οποίος να εφάπτεται και στην  $C_r$  (θεωρείστε όλους τους εξωτερικούς εφαπτόμενους κύκλους της  $C_t$  που εφάπτονται στο  $\hat{t}$  κατά αύξουσα ακτίνα).

ii)  $\hat{t} \in C_t \cap C_r$ . Όταν το  $\hat{t}$  ανήκει στην τομή των συνόρων, τότε ο Απολλώνιος κύκλος εκφυλίζεται στο σημείο  $\hat{t}$ , διότι το  $\hat{t}$  ανήκει στη διχοτόμο καμπύλη των δύο εστιών, σύμφωνα με τον ορισμό της απόστασης. Όταν το  $\hat{t}$  βρίσκεται εντός της  $C_r$ , τότε ο Απολλώνιος κύκλος, σύμφωνα με τον ορισμό της απόστασης, θα πρέπει να είναι εσωτερικός. Όμως ενδέχεται να μην υπάρχει, μιας και η ακτίνα του φράσσεται από την ακτίνα του μέγιστου δίσκου που περιέχεται στη  $C_t$  και εφάπτεται στο  $\hat{t}$  (βλ. ενότητα 3.1.2).  $\square$

**Πόρισμα 3.1.3** Τα σημεία επαφής ενός Απολλώνιου κύκλου βρίσκονται αυστηρά εντός



**Σχήμα 3.5:** Οι διάφορες περιπτώσεις ορισμού του Απολλώνιου κύκλου

του ΚΠ των εστίων, εκτός και αν ο κύκλος αυτός εκφυλίζεται σε εξωτερική εφαπτομένη.

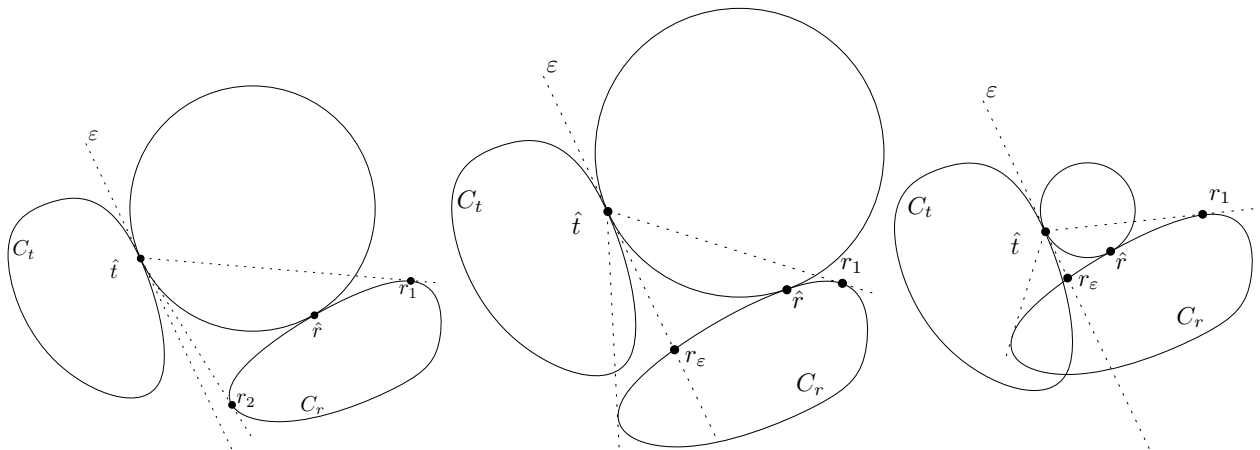
### 3.1.1 Εύρεση εξωτερικού διεφαπτόμενου κύκλου

Έστω δύο εστίες  $C_t$  και  $C_r$  και ένα σημείο  $\hat{t}$  πάνω στην  $C_t$  όπου υπάρχει εξωτερικός Απολλώνιος κύκλος, σύμφωνα με το λήμμα 3.1.2, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Θεωρούμε τώρα όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους στις εστίες, με σημείο επαφής στην  $C_t$  το  $\hat{t}$ . Φέρνουμε τις εφαπτομένες<sup>1</sup> από το  $\hat{t}$  στην  $C_r$ . Αυτές εφάπτονται στα σημεία  $r_1, r_2$  της καμπύλης  $C_r$  και ορίζουν δύο τόξα. Το τόξο  $(r_1, r_2)$ , του οποίου τα εσωτερικά σημεία βρίσκονται στην ίδια πλευρά της χορδής  $r_1 r_2$  όπου βρίσκεται και το  $\hat{t}$ , το ονομάζουμε *ορατό τόξο*.

**Λήμμα 3.1.4** Το ορατό τόξο  $(r_1, r_2)$  περιέχει μόνο σημεία επαφής διεφαπτόμενων κύκλων στο σημείο  $\hat{t}$ , οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στην  $C_r$ . Σε αυτά τα σημεία περιλαμβάνεται και το σημείο επαφής του  $A_{tr}(\hat{t})$  πάνω στην  $C_r$ .

**Απόδειξη.** Η απόδειξη φαίνεται διαισθητικά στο σχήμα 3.6. Έστω ένα σημείο  $\hat{r}$  του ορατού τόξου και ένας κύκλος που να εφάπτεται εσωτερικά στην  $C_r$ . Ένας τέτοιος

<sup>1</sup>Για να μπορούμε να φέρουμε τις εφαπτομένες, θα πρέπει  $\hat{t} \notin C_r$  το οποίο ισχύει λόγω υπόθεσης (λήμμα 3.1.2).



**Σχήμα 3.6:** Ορισμός του απολλώνιου τόξου

κύκλος μπορεί να οριστεί ως ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $\hat{r}K$  όπου  $K$  ένα σημείο πάνω στην κάθετο της  $C_r$  στο  $\hat{r}$ , όταν το  $K$  κινείται προς το εσωτερικό της καμπύλης. Αυτοί οι κύκλοι βρίσκονται εκ κατασκευής στην αντίθετη πλευρά της εφαπτομένης της  $C_r$  στο  $\hat{r}$  από την οποία βρίσκεται το  $\hat{t}$ . Άρα δεν μπορεί ένας τέτοιος κύκλος να εφάπτεται στο  $\hat{t}$ . Το ορατό τόξο περιέχει το σημείο επαφής και του Απολλώνιου κύκλου, διότι αναγκαστικά ο εξωτερικός Απολλώνιος κύκλος στο  $\hat{t}$  θα εφάπτεται στη  $C_r$  σε κάποιο σημείο του ορατού τόξου, αφού α) το σημείο αυτό είναι εσωτερικό του ΚΠ των εστιών και β) σημεία εκτός τους ορατού τόξου δεν είναι δυνατό να αντιστοιχούν σε Απολλώνιο κύκλο που να εφάπτεται στο  $\hat{t}$ , μιας και το σημείο επαφής στην  $C_t$  μετατοπίζεται είτε δεξιότερα είτε αριστερότερα του  $\hat{t}$ , χωρίς ποτέ να συμπίπτει με αυτό.  $\square$

Ωστόσο, το ορατό τόξο μπορεί να περιέχει και μερικούς διεφαπτόμενους κύκλους οι οποίοι να εφάπτονται *εσωτερικά* στην  $C_t$ . Το υποσύνολο του ορατού τόξου που περιέχει μόνο ένα σημείο επαφής, συγκεκριμένα αυτό του Απολλώνιου κύκλου, ονομάζεται *απολλώνιο τόξο*.

**Λήμμα 3.1.5** Δίνονται δύο εστίες  $C_t, C_r$  και σημείο  $\hat{t} \in C_t$ , με  $\hat{t} \notin C_t \cap C_r$ . Θεωρούμε την εφαπτομένη  $\varepsilon$ , στο σημείο  $\hat{t}$  (βλ. σχήμα 3.6). Αν η  $\varepsilon$  δεν τέμνει την  $C_r$ , τότε το ορατό τόξο είναι ένα απολλώνιο τόξο. Διαφορετικά, τα άκρα του απολλώνιου τόξου είναι η τομή της  $\varepsilon$  με την  $C_r$  και το άκρο του ορατού τόξου που βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά από αυτή που βρίσκεται η  $C_t$  ως προς την  $\varepsilon$ .

**Απόδειξη.** Η  $\varepsilon$  διαχωρίζει τους κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά στη  $C_t$  στο σημείο  $\hat{t}$  από τους κύκλους που εφάπτονται εξωτερικά στο ίδιο σημείο, και η τομή της  $\varepsilon$  με τη  $C_r$  διαχωρίζει τα σημεία επαφής αυτών των κύκλων πάνω στη  $C_r$ .  $\square$

Το παραπάνω λήμμα ισχύει και για τεμνόμενες εστίες (βλ. σχήμα 3.6 δεξιά). Αυτό διότι α) ορίζεται εξωτερικός Απολλώνιος κύκλος ( $\hat{t} \notin C_t \cap C_r$  και το  $\hat{t}$  βρίσκεται στο εσωτερικό του ΚΠ) και β) η εφαπτομένη της  $C_t$  στο  $\hat{t}$  τέμνει την  $C_r$ .

Τελικά καταλήγουμε με ένα τόξο  $(r_1, r_2)$  ή  $(r_2, \infty) \cup (-\infty, r_1)$  (ανάλογα με τη θέση του  $\infty$ -point) πάνω στην  $C_r$ , το οποίο περιέχει *μόνο* το σημείο επαφής του Απολλώνιου κύκλου, *διαχωρίζοντάς* το από τα σημεία επαφής των μη εξωτερικών διεφαπτόμενων κύκλων.

**Πόρισμα 3.1.6** Δοθέντος ενός σημείου  $\hat{t}$  πάνω στην  $C_t$ , είναι δυνατό να προσδιορίσουμε (απομονώσουμε) τη μοναδική ρίζα  $\hat{r}$  της  $B(\hat{t}, r)$  (εξίσωση διχοτόμου), η οποία αντιστοιχεί στο σημείο επαφής του Απολλώνιου κύκλου και βρίσκεται εντός του απολλώνιου τόξου της  $C_r$  ως προς το σημείο  $\hat{t}$ .

**Πόρισμα 3.1.7** Το απολλώνιο τόξο βρίσκεται στο εσωτερικό του ΚΠ.

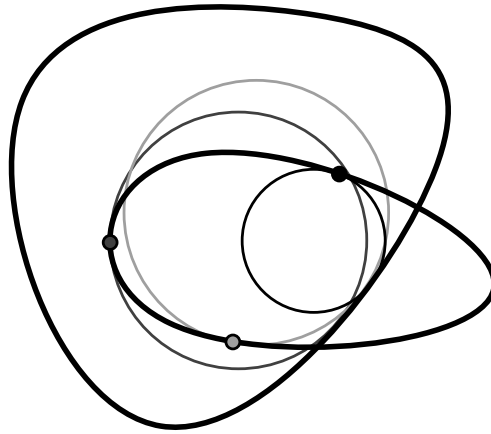
### 3.1.2 Εύρεση εσωτερικού διεφαπτόμενου κύκλου

Ας δούμε τώρα πώς προσδιορίζουμε έναν εσωτερικό διεφαπτόμενο κύκλο ανάμεσα σε όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους. Αν ένας εσωτερικός διεφαπτόμενος κύκλος στο σημείο  $\hat{t}$  της  $C_t$  υπάρχει, τότε, με βάση το λήμμα 3.1.2,  $\hat{t} \in C_t \cap C_r$  και  $\hat{r} \in C_t \cap C_r$  (το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα).

**Λήμμα 3.1.8** Δοδισών των τεμνόμενων εστιών  $C_t$  και  $C_r$ , θεωρούμε το διεφαπτόμενο κύκλο  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  στα σημεία  $\hat{t}$  και  $\hat{r}$  αντίστοιχα, όπου  $\hat{t}, \hat{r} \in C_t \cap C_r$ . Τότε ο  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  είναι ένας εσωτερικός διεφαπτόμενος κύκλος αν και μόνο αν ο  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  έχει τη μικρότερη ακτίνα ανάμεσα σε όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους των  $C_t$  και  $C_r$  στο σημείο  $\hat{t}$ , και η ακτίνα αυτή φράσσεται από την ακτίνα καμπυλότητας της  $C_t$  στο σημείο  $\hat{t}$  και την ακτίνα του μέγιστου δίσκου<sup>2</sup> της  $C_t$  που εφάπτεται στο  $\hat{t}$ .

**Απόδειξη.** ( $\Leftarrow$ ). Έστω  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  ένας εσωτερικός διεφαπτόμενος κύκλος, που σημαίνει ότι  $B_{\hat{t}\hat{r}} \in C_t$ . Τότε η ακτίνα του  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  είναι μικρότερη από την ακτίνα καμπυλότητας της  $C_t$  στο  $\hat{t}$ , αφού ο  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  βρίσκεται εντός της  $C_t$  γύρω από το  $\hat{t}$  [56]. Επίσης, αφού ο  $B_{\hat{t}\hat{r}}$  δε

<sup>2</sup>Του οποίου το κέντρο ανήκει στο μέσο άξονα της  $C_t$  (βλ. ενότητα 1.1).

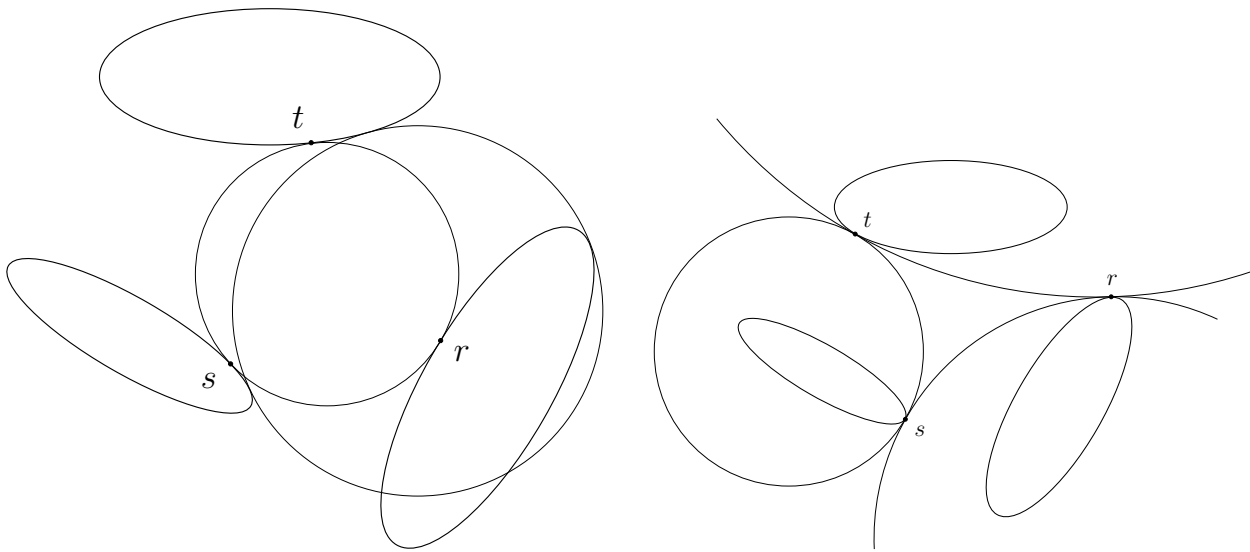


**Σχήμα 3.7:** Μαύρη γραμμή: Εσωτερικός διεφαπτόμενος κύκλος. Γκρι σκούρο: Διεφαπτόμενος κύκλος με ακτίνα μεγαλύτερη της ακτίνας καμπυλότητας (όχι τοπικά εντός). Γκρι ανοιχτό: Διεφαπτόμενος κύκλος με ακτίνα μεγαλύτερη από αυτή του μέγιστου δίσκου (όχι ολικά εντός)

διασχίζει την  $C_t$ , η ακτίνα του δεν είναι μεγαλύτερη από εκείνη του μέγιστου δίσκου της  $C_t$  στο  $\hat{t}$  (πρόκειται για την απόσταση του  $\hat{t}$  από το αντίστοιχο σημείο στο μέσο άξονα της  $C_t$ ). Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας άλλος κύκλος  $B'_{tr}$  εσωτερικός της  $C_t$  που να εφάπτεται στο  $\hat{t}$  με ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα του  $B_{tr}$ . Τότε ο  $B'_{tr}$  δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την  $C_r$ , αφού ο  $B_{tr}$  εφάπτεται εσωτερικά στην  $C_r$ . Επομένως, ο  $B_{tr}$  έχει τη μικρότερη ακτίνα ανάμεσα σε όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους των  $C_t$  και  $C_r$  που εφάπτονται στο  $\hat{t}$ .

( $\Rightarrow$ ). Έστω ότι ο  $B_{tr}$  έχει τη μικρότερη ακτίνα ανάμεσα σε όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους που εφάπτονται στο  $\hat{t}$ , η οποία δεν είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα καμπυλότητας της  $C_t$  στο  $\hat{t}$ , ούτε από την ακτίνα του μέγιστου δίσκου της  $C_t$  που εφάπτεται στο  $\hat{t}$  (το κέντρο του οποίου ανήκει στο μέσο άξονα της  $C_t$ ). Τότε τοπικά (γύρω από το  $\hat{t}$ ) η  $B_{tr}$  βρίσκεται εντός της  $C_t$ . Επίσης, (ολικά) η  $B_{tr}$  δε διασχίζει την  $C_t$ , επομένως  $B_{tr} \in C_t$ . Αφού  $\hat{t} \in C_t \cap C_r$  συνεπάγεται ότι ο  $B_{tr}$  εφάπτεται εσωτερικά στην  $C_r$ .  $\square$

Στο σχήμα 3.7 φαίνονται μερικοί διεφαπτόμενοι κύκλοι, εκ των οποίων μόνο ένας είναι εσωτερικός και στις δύο εστίες. Ο αναγνώστης μπορεί να παρατηρήσει μια ομοιότητα της διχοτόμου δύο εστιών με εκείνη του *συνόλου συμμετρίας* μιας καμπύλης, το οποίο ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων όλων των διεφαπτόμενων κύκλων στην καμπύλη [57]. Στην πραγματικότητα, μέρος της διχοτόμου δύο εστιών μπορεί να ταυτίζεται με μέρος του συνόλου συμμετρίας μιας συνεχούς



**Σχήμα 3.8:** Πραγματικές λύσεις του συστήματος (3.2)

καμπύλης που να αποτελείται από δύο τόξα (ένα από κάθε εστία) και ένα κομμάτι που να τα συνενώνει. Ο μέσος άξονας μίας καμπύλης είναι υποσύνολο του συνόλου συμμετρίας της, διότι τα σημεία του είναι κέντρα διεφαπτόμενων κύκλων οι οποίοι βρίσκονται εντός της καμπύλης. Τέλος, ο υπολογισμός εσωτερικών διεφαπτόμενων κύκλων, χρησιμοποιείται και για τον εντοπισμό του μέσου άξονα (βλ. θεώρημα 1.1.5).

## 3.2 Τριεφαπτόμενος κύκλος

Έχοντας ορίσει τους διεφαπτόμενους κύκλους, ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να ορίσουμε έναν τριεφαπτόμενο κύκλο. Το κέντρο ενός τριεφαπτόμενου κύκλου ανήκει στην τομή δύο διχοτόμων καμπυλών. Στον παραμετρικό χώρο, οι εξισώσεις για την τομή δύο διχοτόμων περιλαμβάνουν τρεις μεταβλητές έτσι, για να εκφράσουμε έναν τριεφαπτόμενο κύκλο εισάγουμε και την εξίσωση της τρίτης διχοτόμου:

$$B_1(t, r) = B_2(r, s) = B_3(s, t) = 0. \quad (3.2)$$

Το σύνολο λύσεων του συστήματος (3.2) περιέχει σημεία επαφής τριεφαπτόμενων κύκλων (αριστερό σχήμα 3.8), καθώς επίσης και σημεία επαφής εφαπτόμενων κύκλων σε κάθε ζεύγος εστιών (δεξί σχήμα 3.8). Βλέπουμε δηλαδή ότι το σύστημα

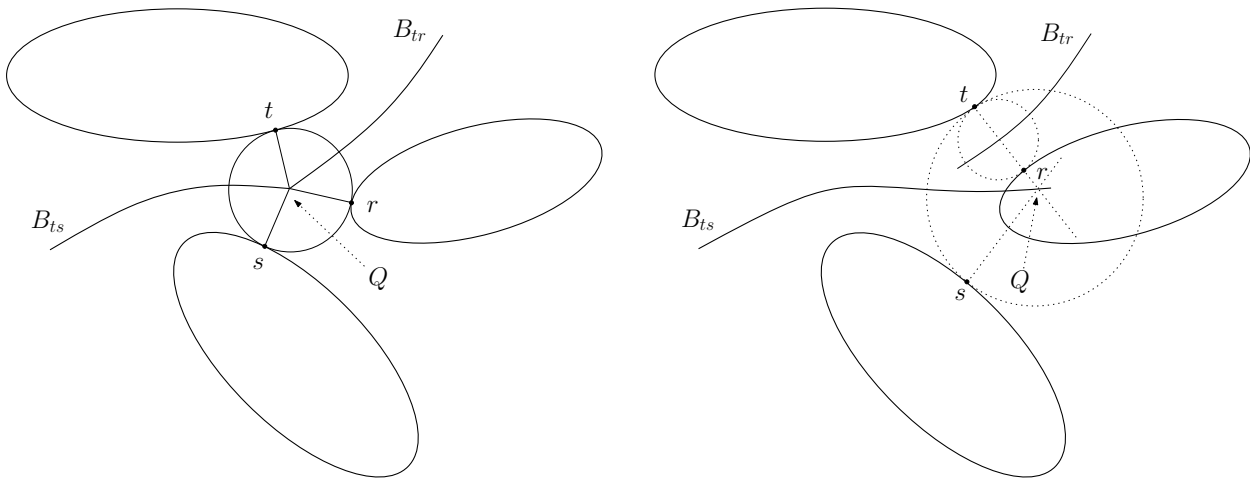
έχει και πλεονάζουσες πραγματικές λύσεις, λύσεις που δεν αντιστοιχούν σε τριεφαπτόμενο κύκλο, αλλά σε κάποια άλλη γεωμετρική κατασκευή. Το πλεονέκτημα του συστήματος αυτού είναι ότι περιέχει μικρό αριθμό εξισώσεων (3) με μικρό αριθμό αγνώστων η καθεμία (2). Το γεγονός αυτό θα εκμεταλλευτούμε στην ενότητα 3.4.2 όπου θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο υποδιαίρεσης τετραγωνικής σύγκλισης για την επίλυση αυτού του συστήματος. Ωστόσο για αλγεβρική επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε άλλο αλγεβρικό σύστημα (το σύστημα (3.4)), του οποίου η απαλοίφουσα υπολογίζεται πολύ πιο γρήγορα απ' ό,τι του (3.2) και της οποίας οι πλεονάζοντες όροι είναι πολύ μικρότερου βαθμού. Στην περίπτωση ελλείψεων, για παράδειγμα, η απαλοίφουσα του (3.2) μπορεί να έχει πλεονάζοντες όρους βαθμού 152, αντίθετα με εκείνη του (3.4), της οποίας οι πλεονάζοντες όροι (ελεύθεροι τετραγώνων) έχουν βαθμό μόλις 2! Ο μικτός όγκος του συστήματος (3.2) στην περίπτωση ελλείψεων είναι 432. Αριθμητική επίλυση ορισμένων παραδειγμάτων με το PHSACK (κάθε παράδειγμα περιλαμβάνει μία τριάδα ελλείψεων) έγινε σε χρόνο περίπου 59 sec σε έναν Pentium-4 2.6GHz. Αυτό δικαιολογεί εν μέρει την ανάγκη των εξειδικευμένων μεθόδων που θα αναπτύξουμε και οι οποίες προσδιορίζουν την πραγματική ρίζα που μας ενδιαφέρει μέσα σε λίγα εκατοστά του δευτερολέπτου.

Μια εξήγηση για το ότι παίρνουμε πλεονάζουσες λύσεις στο σύστημα (3.2) είναι ότι ο προσδιορισμός του τριεφαπτόμενου κύκλου γίνεται με πλεονάζουσα πληροφορία. Θεωρήστε για παράδειγμα τις δύο από τις τρεις εξισώσεις του συστήματος:  $B_1(t, r) = B_3(s, t) = 0$ . Αυτές ορίζουν ένα σημείο τομής καθέτων στις εστίες, καθώς και το ότι αυτό ισαπέχει από τις εστίες. Επομένως, ο τρίτος περιορισμός μπορεί απλά να είναι οι κάθετες να τέμνονται στο ίδιο σημείο. Καταλήγουμε έτσι στο εξής σύστημα:

$$Q(t, r, s) = B_1(t, r) = B_3(s, t) = 0. \quad (3.3)$$

Το  $Q$  είναι η συνθήκη που απαιτεί οι κάθετοι σε κάθε εστία να τέμνονται σε ένα και μοναδικό σημείο. Το  $Q$  είναι πολυώνυμο συνολικού βαθμού  $\leq 3(3d - 2)$ ,  $\leq 3d - 2$  σε κάθε μεταβλητή  $t, r, s$  (στην περίπτωση ελλείψεων οι βαθμοί είναι 12 και 4 αντίστοιχα). Και πάλι το σύστημα αυτό έχει πρόσθετες πραγματικές ρίζες οι οποίες αντιστοιχούν σε σημεία όπου οι κάθετοι δύο εστιών ταυτίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9. Ο μικτός όγκος του συστήματος (στην περίπτωση ελλείψεων) είναι και πάλι 432, ενώ το PHSACK για αριθμητική επίλυση χρειάστηκε ελαφρά περισσότερο χρόνο (68 sec) σε Pentium-4 2.6GHz.

Αυτή τη φορά όμως μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (3.3) σχετικά γρήγορα



**Σχήμα 3.9:** Πραγματικές λύσεις του συστήματος (3.3)

μέσω απαλοιφής. Αυτό γίνεται υπολογίζοντας πρώτα την απαλοιφούσα Sylvester  $R_1$  των  $Q$  και  $B_3$  απαλείφοντας το  $s$ , και στη συνέχεια υπολογίζοντας την απαλοιφούσα Sylvester των  $R_1$  και  $B_1$  απαλείφοντας το  $r$ . Δε θα επιμείνουμε άλλο σε αυτόν τον υπολογισμό (ο οποίος παρουσιάζεται αναλυτικότερα στις [33, 32]), διότι στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν ακόμα καλύτερο τρόπο.

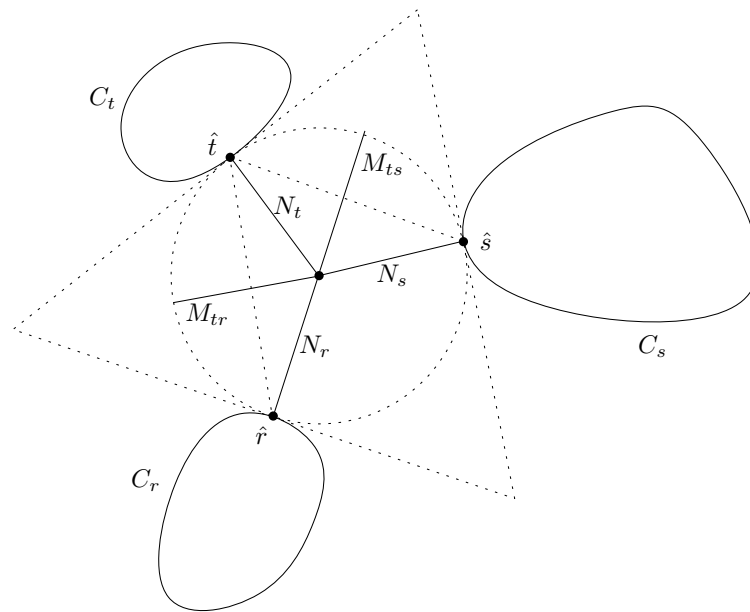
Μπορούμε να αποφύγουμε ένα μεγάλο πλήθος πλεοναζουσών λύσεων, αν προσδιορίσουμε τον τριεφαπτόμενο κύκλο χωρίς πλεονάζουσα πληροφορία. Θα χρησιμοποιήσουμε τις πρωταρχικές εξισώσεις της καθέτου και της μεσοκαθέτου με τις οποίες ορίσαμε και τον διεφαπτόμενο κύκλο. Δοθεισών τριών εστιών  $C_t, C_r, C_s$ , το σύστημα διατυπώνεται ως εξής (βλ. σχήμα 3.10):

$$\begin{aligned} N_t(x, y, t) = N_r(x, y, r) = N_s(x, y, s) &= 0 \\ M_{tr}(x, y, t, r) = M_{ts}(x, y, t, s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Οι πρώτες τρεις εξισώσεις αντιστοιχούν στις καθέτους στα σημεία  $t, r, s$  τα οποία βρίσκονται πάνω σε καθεμία από τις τρεις δοθείσες εστίες. Όλες οι κάθετοι τέμνονται στο σημείο  $(x, y)$ . Οι τελευταίες δύο εξισώσεις απαιτούν το  $(x, y)$  να ισαπέχει από τις εστίες: καθεμία από αυτές αντιστοιχεί στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία των εστιών από τα οποία φέρνουμε την κάθετο (βλ. σχήμα 3.10). Προσέξτε ότι η απαλοιφή των  $x, y$  από τα  $M_{tr}, N_t, N_r$  δίνει τη διχοτόμο των εστιών  $C_t$  και  $C_r$ .

Το σύστημα 3.4 περιλαμβάνει πέντε εξισώσεις και πέντε αγνώστους. Το ίδιο σύστημα επιλύεται αριθμητικά στην [13] χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson.





**Σχήμα 3.10:** Εξωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος

Θα δείξουμε ότι είναι δυνατό να το επιλύσουμε και αλγεβρικά, υπολογίζοντας την απαλοιφούσά του, μέσω διαδοχικών απαλοιφουσών Sylvester, όπως κάναμε και για το (3.3).

Το σύνολο πραγματικών λύσεων περιέχει όλους τους τριεφαπτόμενους κύκλους στις τρεις εστίες. Υπάρχουν λύσεις οι οποίες αντιστοιχούν σε κύκλους με θετική φορά, και λύσεις που αντιστοιχούν σε κύκλους με αρνητική φορά και οι οποίες δεν αντιστοιχούν στο κύκλο Voronoi που ψάχνουμε, αλλά σε κάποιον άλλο τριεφαπτόμενο κύκλο (βλ. σχήμα 3.1).

### 3.3 Ύπαρξη κύκλου Voronoi

Σε μερικές περιπτώσεις απαιτείται να γνωρίζουμε εάν υπάρχει ή όχι ο κύκλος Voronoi (με θετική φορά)  $V_{trs}$ . Πρόκειται για γενίκευση του κατηγορήματος EXISTENCE της [24] στην περίπτωση ψευδοκύκλων.

Προφανώς ένας τρόπος για να διαπιστώσουμε αν υπάρχει ο  $V_{trs}$  είναι να λύσουμε το σύστημα (3.4) και να ψάξουμε για τον  $V_{trs}$  ανάμεσα στις λύσεις. Ωστόσο, μπορούμε να αποφύγουμε να λύσουμε το σύστημα και παρ' όλα αυτά, να διαπιστώσουμε όχι μόνο την ύπαρξη του κύκλου, αλλά και τον τύπο του ως εξωτερικό ή εσωτερικό.

Καταρχήν, αν μία εστία βρίσκεται μέσα σε μία άλλη, τότε είναι κρυφή και ο  $V_{trs}$

δεν μπορεί να υπάρχει. Επομένως, υποθέτουμε ότι δε βρίσκεται κάποια εστία εξ ολοκλήρου μέσα σε μία άλλη.

Παρατηρείστε ότι το  $\text{DISTANCEFROMBITANGENT}$  (DFB για συντομία) είναι μια ειδική περίπτωση του  $\text{INCIRCLE}$ , όπου η  $\text{CCW}$  κοινή εφαπτομένη (όπως ορίστηκε στην αρχή της ενότητας 2.5) είναι ένας κύκλος άπειρης ακτίνας με θετική φορά. Γεωμετρικά, μια διένεξη αυτού του τύπου σημαίνει ότι η εισαγωγή της εστίας  $C_s$  στο διάγραμμα Voronoi θα ακυρώσει μέρος της διχοτόμου των  $C_t$  και  $C_r$ . Σε αυτή την περίπτωση το αποτέλεσμα του κατηγορήματος είναι αρνητικό, δηλαδή,  $\text{DFB}(C_t, C_r, C_s) < 0$ , διαφορετικά  $\text{DFB}(C_t, C_r, C_s) \geq 0$ .

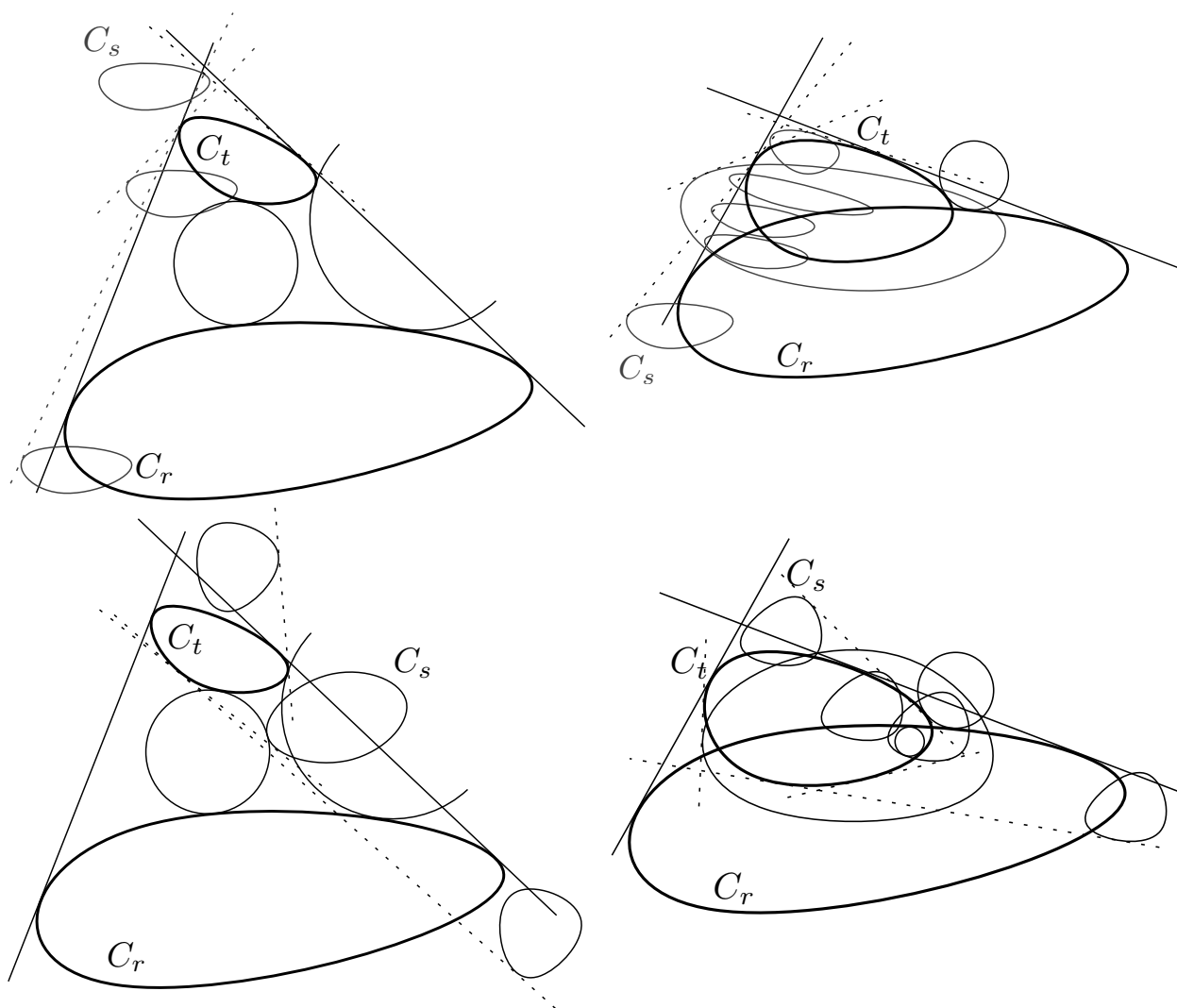
Θεωρούμε τρίτη εστία  $C_s$  η οποία δεν τέμνει τις  $C_t$  και  $C_r$ . Έστω  $|l_1| = 0$  ή  $1$  ανάλογα με τον αν  $\text{DFB}(C_t, C_r, C_s) < 0$  ή όχι. Ομοίως ορίζουμε το  $|l_2|$  για το  $\text{DFB}(C_r, C_t, C_s)$ . Έστω  $\text{ΚΠ}^\circ$  το εσωτερικό του  $\text{ΚΠ}$  των  $C_t, C_r$ . Τότε, το πλήθος των κύκλων Voronoi είναι

$$\begin{cases} |l_1| + |l_2|, & \text{αν } C_s \cap \text{ΚΠ}^\circ = \emptyset \\ 2 - |l_1| - |l_2|, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω παρατήρηση ως εξής:

**Λήμμα 3.3.1** Δοδισών των εστιών  $C_t, C_r, C_s$ , έστω  $\kappa$  το πλήθος των αρνητικών αποτιμήσεων (διενέξεων) του  $\text{DISTANCEFROMBITANGENT}$ , όταν αυτό υπολογίζεται στις τριάδες  $(C_t, C_r, C_s)$ ,  $(C_r, C_s, C_t)$  και  $(C_s, C_t, C_r)$ . Τότε (i) Αν  $\kappa < 2$  ο  $V_{trs}$  δεν υπάρχει. (ii) Αν  $\kappa \geq 2$  τότε: (α) Αν  $C_t \cap C_r \cap C_s \neq \emptyset$  και υπάρχει ακολουθία τόξων  $[t, r, s]$  πάνω στο σύνορο της τομής (π.χ. μία ακολουθία τόξων με δετική φορά πάνω στις  $C_t, C_r$  και  $C_s$ ), τότε είτε ο  $V_{trs}$  είναι εσωτερικός είτε δεν υπάρχει. (β) Διαφορετικά, ο  $V_{trs}$  υπάρχει και είναι εξωτερικός.

**Απόδειξη.** (i) Περίπτωση  $\kappa < 2$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $\text{DFB}(C_t, C_r, C_s) \geq 0$  και  $\text{DFB}(C_s, C_t, C_r) \geq 0$ . Αν  $C_t \cap C_r = \emptyset$  (βλ. σχήμα 3.11 πάνω αριστερά), τότε οι  $C_t, C_r, C_s$  δεν επιδέχονται εξωτερικό τριεφαπτόμενο κύκλο που να τις ακουμπά με αυτή τη σειρά (κατά τη θετική φορά). Επειδή οι εστίες δεν τέμνονται, δεν υπάρχει ούτε εσωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος. Επομένως ο  $V_{trs}$  δεν υπάρχει. Αν  $C_t \cap C_r \neq \emptyset$  (βλ. σχήμα 3.11 πάνω δεξιά), τότε, λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις δυνατές θέσεις της  $C_s$ , δεν μπορεί να υπάρχει τομή και των τριών εστιών με ακολουθία τόξων  $[t, r, s]$  στο σύνορό της, αφού η  $C_s$  θα έπρεπε να μην τέμνει την αριστερή εφαπτομένη των  $C_t$  και  $C_r$  (χωρίς κάτι τέτοιο να είναι δυνατό), είτε θα έπρεπε να τέμνει κάποια εστία πάνω από δύο φορές (κάτι που θα χάλαγε την ιδιότητα των



**Σχήμα 3.11:** Πάνω:  $\kappa < 2$ . Κάτω:  $\kappa \geq 2$ . Αριστερά:  $C_t \cap C_r = \emptyset$ . Δεξιά  $C_t \cap C_r \neq \emptyset$

ψευδοκύκλων). Επομένως, εσωτερικός  $V_{trs}$  δεν υπάρχει. Με παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε εξωτερικός  $V_{trs}$  υπάρχει.

(ii) Περίπτωση  $\kappa \geq 2$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $DFB(C_t, C_r, C_s) < 0$  και  $DFB(C_s, C_t, C_r) < 0$ . (α) Περίπτωση  $C_t \cap C_r \cap C_s \neq \emptyset$  και υπάρχει ακολουθία τόξων  $[t, r, s]$ . Ο  $V_{trs}$  δεν μπορεί να είναι εξωτερικός, διότι σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε είτε  $DFB(C_r, C_t, C_s) < 0$  (π.χ., η  $C_s$  να τέμνει αριστερή εφαπτομένη των  $C_t$  και  $C_r$ ), είτε η  $C_s$  θα έπρεπε να τέμνει κάποια εστία πάνω από δύο φορές. Γι' αυτό, αν ο  $V_{trs}$  υπάρχει, θα πρέπει να είναι εσωτερικός (βλ. σχήμα 3.11 κάτω δεξιά). Πράγματι, ο εσωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος δεν υπάρχει αν η εστία  $C_t$  είναι κρυφή (κρύβεται ολικά, εν μέρει από τη  $C_r$  και εν μέρει από τη  $C_s$ ). (β) Αν  $C_t \cap C_r \cap C_s = \emptyset$  τότε ο  $V_{trs}$  δεν μπορεί να είναι εσωτερικός. Προκύπτει (βλ. κάτω σχήμα 3.11) ότι ο  $V_{trs}$  υπάρχει και είναι εξωτερικός. Τέλος, αν η τομή είναι μη κενή και δεν υπάρχει ακολουθία τόξων  $[t, r, s]$ , τότε με επιχειρήματα ανάλογα της περίπτωσης (ii,α) μένουμε μόνο με την περίπτωση όπου ο  $V_{trs}$  υπάρχει και αναγκαστικά είναι εξωτερικός (βλ. σχήμα 3.11 κάτω δεξιά).  $\square$

## 3.4 Εύρεση κύκλου Voronoi με υποδιαίρεση

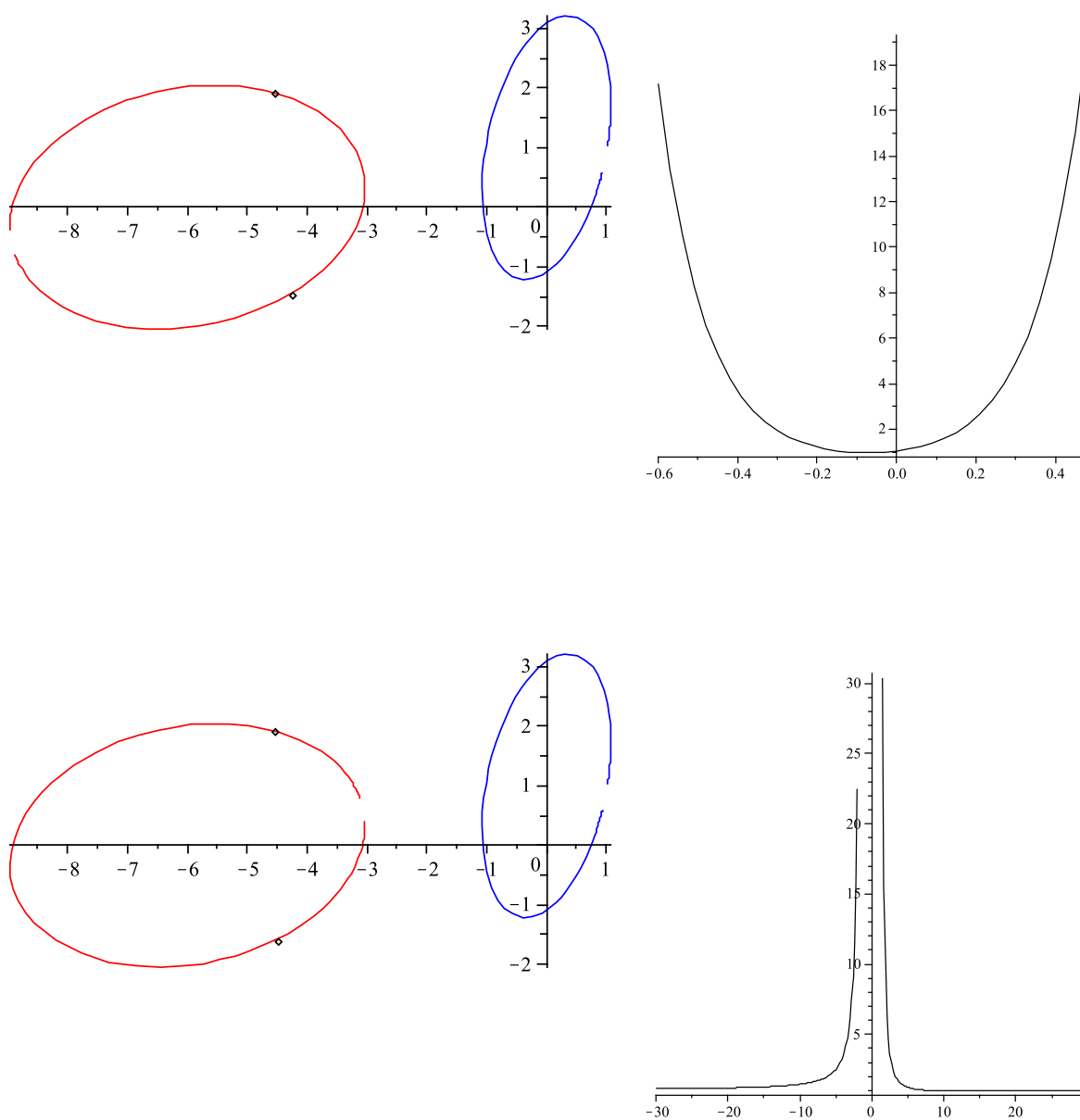
### 3.4.1 Γενικός αλγόριθμος γραμμικής σύγκλισης

Θεωρούμε δύο μή τεμνόμενες εστίες  $C_t, C_r$  και ένα σημείο  $\hat{t}$  της  $C_t$ . Το τετράγωνο της ακτίνας του Απολλώνιου κύκλου των δύο εστιών ο οποίος εφάπτεται στα σημεία  $\hat{t}$  και  $\hat{r}$  των  $C_t, C_r$  θα το συμβολίζουμε με  $\delta_{tr}^2(\hat{t})$ . Από τον ορισμό προκύπτει ότι:  $\delta_{tr}^2(\hat{t}) := (\hat{x} - X_t(\hat{t}))^2 + (\hat{y} - Y_t(\hat{t}))^2$ , όπου  $(\hat{x}, \hat{y})$  λύση του συστήματος  $N_t(x, y, \hat{t}) = N_r(x, y, \hat{r}) = 0$  ως προς  $(x, y)$ .

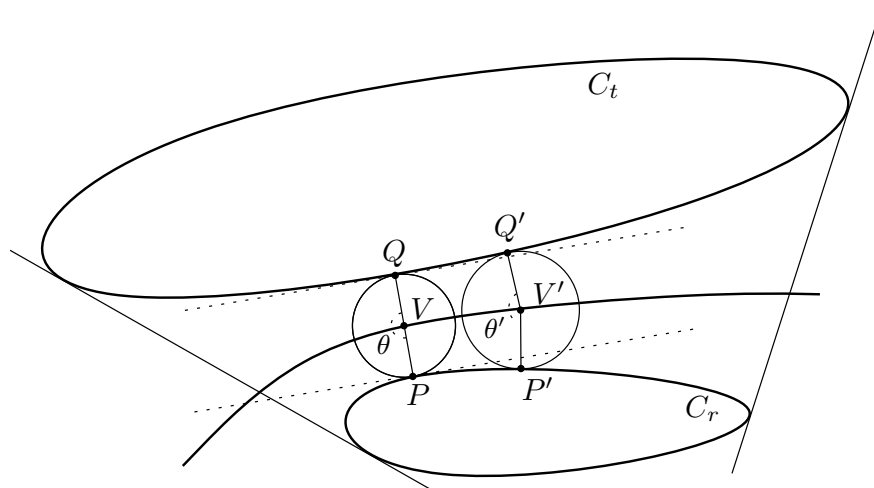
Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $\delta_{tr}^2(t)$  ορίζεται σε ένα συνεχές διάστημα  $(a, b)$  (το οποίο δεν περιέχει το  $\infty$ -point, σχήμα 3.12 πάνω). Αν το διάστημα είναι της μορφής  $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$  (σχήμα 3.12 κάτω, όπου το τόξο που διαγράφει το  $t$  περιλαμβάνει το  $\infty$ -point), τότε η μελέτη της  $\delta^2$  ενδέχεται να γίνεται ευκολότερα (μιας και είναι μονότονη στο ένα από τα δύο υποδιαστήματα).

**Λήμμα 3.4.1** Το πεδίο ορισμού της  $\delta^2$  είναι η ένωση δύο διαστημάτων, πιθανώς ξένων, με την  $\delta^2$  να είναι γνησίως αύξουσα στο ένα και γνησίως φθίνουσα στο άλλο.

**Απόδειξη.** Υπάρχουν δύο μοναδικά σημεία  $P$  και  $Q$  πάνω στις  $C_t$  και  $C_r$  αντίστοιχα,



**Σχήμα 3.12:** Ενδεικτική γραφική παράσταση της  $\delta_{tr}^2(t)$ . Αριστερή έλλειψη με παράμετρο  $t$ , δεξιά με παράμετρο  $r$ . Πάνω:  $t \in (-0.6, 0.5)$ . Κάτω:  $t \in (-\infty, -2) \cup (1.5, +\infty)$



**Σχήμα 3.13:** Η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη

των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι η μικρότερη δυνατή (σχήμα 3.13). Καθώς κινούμαστε από το  $P$  στο  $P'$  (κατά την αρνητική φορά), έχουμε:  $|\overrightarrow{P\hat{V}}| + |\overrightarrow{V\hat{Q}}| < |\overrightarrow{P'\hat{V}'}| + |\overrightarrow{V'\hat{Q}'}|$ , αφού  $\overrightarrow{P\hat{V}}$  και  $\overrightarrow{V\hat{Q}}$  τέμνουν τις εφαπτομένες στα  $P$  και  $Q$  αντίστοιχα και η γωνία  $\theta' = \widehat{P'\hat{V}'Q'}$  είναι μικρότερη από τη γωνία  $\theta = \widehat{P\hat{V}Q}$ . Επομένως η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου αυξάνει μονότονα προς το άπειρο. Με τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι η ακτίνα αυξάνει επίσης όταν κινούμαστε και κατά τη θετική φορά. Εξαιτίας της παραμετροποίησης που χρησιμοποιούμε, τα διαστήματα στα οποία μεταβάλλεται η  $\delta^2$  είναι ξένα όταν το πεδίο ορισμού της περιλαμβάνει το  $\infty$ -point.  $\square$

Στο σχήμα 3.12 φαίνεται μια ενδεικτική γραφική παράσταση της  $\delta^2$ . Το γράφημα είναι σωστό ως προς τη μονοτονία. Δεν έχουμε αποδείξει ωστόσο κάτι για την κυρτότητα ή την κοιλότητα. Αυτό που φαίνεται στο σχήμα είναι η  $\delta^2$  στην περίπτωση δύο ελλείψεων, όπως αυτή υπολογίστηκε αριθμητικά.

Για να υπολογίσουμε μια τιμή της  $\delta^2$  σε ένα σημείο  $\hat{t}$  θα πρέπει να προσδιορίσουμε και το  $\hat{r}$ . Αυτό όπως είδαμε μπορεί να γίνει με τον υπολογισμό του απολλώνιου τόξου.

Τώρα μπορούμε να περιγράψουμε τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης. Η ιδέα είναι ότι «ολισθαίνουμε» έναν Απολλώνιο κύκλο προσπαθώντας να τον κάνουμε να εφάπτεται και σε μια τρίτη εστία. Το σημείο επαφής του κύκλου Voronoi μπορεί να προσδιοριστεί με τη συνθήκη:

$$\delta_{tr}^2(t) - \delta_{ts}^2(t) = 0.$$

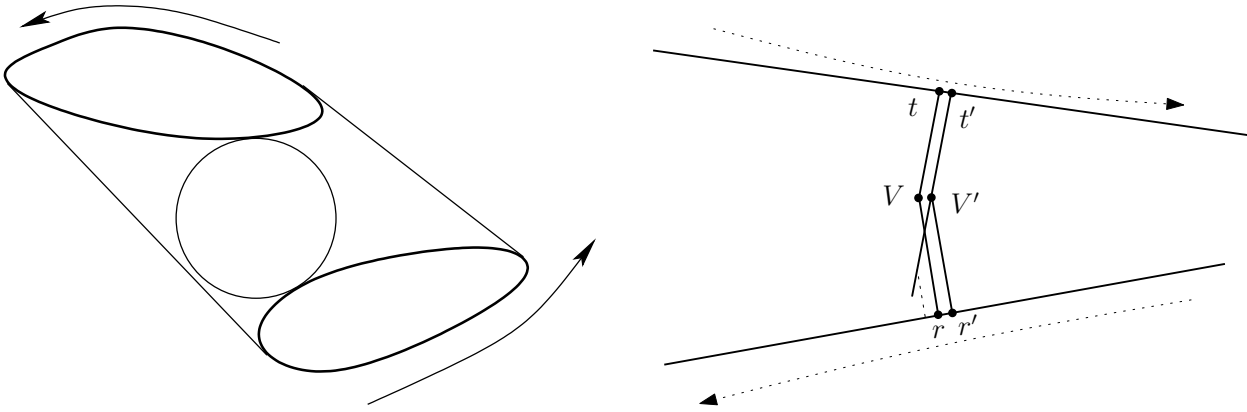
Ψάχνουμε επομένως για την τομή των γραφημάτων των  $\delta_{tr}^2$  και  $\delta_{ts}^2$  το οποίο μπορεί να γίνει με μια μέθοδο διχοτόμησης, εκμεταλλευόμενοι και τη γνωστή μονοτονία των δύο συναρτήσεων [32, 11]. Μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω ιδέα ώστε να δουλεύει και με εσωτερικό Απολλώνιο κύκλο στην περίπτωση τεμνόμενων εστιών (θεωρώντας το αρνητικό τετράγωνο ακτίνας διατηρούμε τη μονοτονία). Ωστόσο δε θα επιμείνουμε άλλο, διότι ο αλγόριθμος αυτός παρουσιάζει γραμμική σύγκλιση και κάνει βαρείς υπολογισμούς. Παρ' όλα αυτά είναι μια πρώτη μέθοδος αριθμητικής εύρεσης του κύκλου Voronoi η οποία εκμεταλλεύεται τη γεωμετρία του προβλήματος «γνωρίζοντας πού να ψάξει» για τη λύση. Αυτό όμως που είναι περισσότερο σημαντικό και εφαρμόστηκε με επιτυχία στην υλοποίησή μας, είναι ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

### 3.4.2 Αλγόριθμος τετραγωνικής σύγκλισης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο υποδιαίρεσης για γρήγορη προσέγγιση της ρίζας του συστήματος (3.2) όταν πρόκειται για κυρτές ομαλές εστίες. Για την ώρα υποθέτουμε ότι οι εστίες δεν τέμνονται, όμως στο τέλος της ενότητας θα εξετάσουμε και την περίπτωση όπου οι εστίες τέμνονται. Η ομαλότητα εξασφαλίζει την ύπαρξη της καθέτου σε κάθε σημείο της καμπύλης, ενώ η κυρτότητα εξασφαλίζει ότι κάθε σημείο της καμπύλης αντιστοιχεί σε ένα σημείο της διχοτόμου καμπύλης. Έχοντας βρει ένα κατάλληλο διάστημα εκκίνησης, αρκεί τοπική κυρτότητα γύρω από το σημείο επαφής του κύκλου Voronoi.

Πειράματα (που κάναμε) με γενικές μεθόδους υποδιαίρεσης βασισμένες σε λογισμό με μερικές παραγώγους (gradient based) έδειξαν ότι αυτές τρέχουν γρηγορότερα με το σύστημα (3.2) παρά με το (3.3), ίσως διότι το πρώτο περιέχει μόνο δύο μεταβλητές ανά εξίσωση. Ο αλγόριθμος που θα παρουσιάσουμε επιτυγχάνει τετραγωνική σύγκλιση εκμεταλλευόμενος τη συμμετρία του προβλήματος. Είναι εύκολος στην υλοποίηση, διότι δεν απαιτεί υπολογισμό μερικών παραγώγων, γεγονός που τον καθιστά απλούστερο ως προς τις γενικές μεθόδους υποδιαίρεσης.

**Λήμμα 3.4.2** *Θεωρούμε εξωτερικό διεφαπτόμενο κύκλο στα σημεία  $t$  και  $r$  που σημαίνει ότι  $B_1(t, r) = 0$ . Αν ολισθήσουμε κατά ένα μικρό διάστημα τον κύκλο αυτό κατά μήκος του συνόρου των εστιών, μεταβάλλοντας την ακτίνα του και διατηρώντας την επαφή στα σημεία  $t'$  και  $r'$  αντίστοιχα, τότε  $t' > t \implies r' < r$ .*



**Σχήμα 3.14:** Αριστερά: Δύο εστίες με θετική φορά. Δεξιά:  $t' > t \implies r' < r$

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε ότι  $t' > t \implies r' < r$ , υποθέτοντας ότι οι παράμετροι των δύο καμπυλών ακολουθούν το γράφημά τους κατά τη θετική φορά (αριστερό σχήμα 3.14). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι εφαπτομένες στα αρχικά σημεία  $t$  και  $r$  τέμνονται και μάλιστα αν  $s$  το σημείο τομής, τότε η τριάδα σημείων  $t, r, s$  έχει θετική φορά.

Έστω ο διεφαπτόμενος κύκλος στα σημεία  $t$  και  $r$  αντίστοιχα. Οι κάθετοι στα  $t$  και  $r$  τέμνονται στο σημείο  $V$  και  $|\vec{V}r| = |\vec{V}t|$  (δεξί σχήμα 3.14). Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο διεφαπτόμενος κύκλος μετακινείται απειροελάχιστα, έτσι ώστε το  $t$  να αυξάνει στο  $t'$  και το  $r$  να πηγαίνει στο  $r'$ . Έστω  $V'$  το σημείο τομής των καθέτων στα  $t'$  και  $r'$  αντίστοιχα. Σημειωτέον ότι το  $r$  είναι μία *συνεχής* συνάρτηση του  $t$ . Αν το  $r$  *αυξηθεί* στο  $r'$ , τότε  $\exists \epsilon > 0 : \forall r' \in (r, r + \epsilon) |\vec{V}'r'| < |\vec{V}'t'|$  το οποίο είναι άτοπο. Άρα το  $r$  μειώνεται.  $\square$

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου είναι η εξής: Έστω  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{s})$  η ρίζα του συστήματος (3.2) που ψάχνουμε. Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα:

$$B_1(t_1, r_2) = B_2(r_2, s_1) = B_3(s_1, t_2) = 0 \quad (3.5)$$

$$B_1(t_2, r_1) = B_2(r_1, s_2) = B_3(s_2, t_1) = 0 \quad (3.6)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι παρόμοιες με την (3.2). Η διαφορά είναι ότι έχουμε θεωρήσει  $t_1 \neq t_2$  στη γενική περίπτωση και επομένως, μπορούμε να ξεκινήσουμε να λύνουμε τις παραπάνω εξισώσεις με τη σειρά που δίνονται. Με αυτόν τον τρόπο και κρατώντας τις λύσεις σε κάθε βήμα που αντιστοιχούν μόνο στον εξωτερικό διεφαπτόμενο κύκλο, οδηγούμαστε σε μια κατασκευή σαν αυτή του σχήματος 3.15.



Δηλαδή, αν ξεκινήσουμε από ένα σημείο της καμπύλης, υπολογίζουμε για κάθε καμπύλη δύο διαφαπτόμενους κύκλους. Αν είμαστε αρκετά τυχεροί, όλοι αυτοί οι κύκλοι ταυτίζονται με τον κύκλο Voronoi ( $t_1 = \hat{t} = t_2$ ). Διαφορετικά, έχουμε βρει ένα διάστημα  $[t_1, t_2]$  το οποίο περιέχει το  $\hat{t}$ . Έχοντας ένα περικλείον διάστημα  $[t_1, t_2]$  για το  $\hat{t}$  μπορούμε να το υποδιαιρέσουμε περαιτέρω διαλέγοντας ένα νέο σημείο  $t'_1$  στο εσωτερικό του και υπολογίζοντας ένα νέο διάστημα  $[t'_1, t'_2]$  (υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $t'_1 < t'_2$ ). Ως συνέπεια του λήμματος 3.4.2, το  $t_1$  πλησιάζει το  $\hat{t}$  από αριστερά  $\Rightarrow$  το  $r_2$  πλησιάζει το  $\hat{r}$  από δεξιά  $\Rightarrow s_1$  πλησιάζει το  $\hat{s}$  από αριστερά  $\Rightarrow$  το  $t_2$  πλησιάζει το  $\hat{t}$  από δεξιά (βλ. σχήμα 3.15). Άρα  $t'_1 \in [t_1, t_2] \implies \hat{t} \in [t'_1, t'_2] \subset [t_1, t_2]$ . Ο υπολογισμός ενός μικρότερου διαστήματος στη διάσταση  $t$  μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μικρότερα διαστήματα και στις διαστάσεις  $r$  και  $s$ . Επομένως χρειάζεται να διατηρούμε μόνο ένα κουτί που περιέχει τη λύση μας, αντίθετα με γενικές μεθόδους αριθμητικής διαστημάτων οι οποίες προσωρινά διατηρούν έναν μεγάλο αριθμό από κουτιά τα οποία μπορεί να περιέχουν μια λύση και αργότερα τα απορρίπτουν.

Παρατηρείστε ότι απαλοίφοντας τα  $r_2, s_1$  από την (3.5) παίρνουμε το  $R(t_1, t_2)$ , ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Ομοίως, απαλοίφοντας τα  $r_1, s_2$  από την (3.6) παίρνουμε το  $R(t_2, t_1)$ , ένα πολυώνυμο επίσης δύο μεταβλητών. Επίσης,  $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ , αφού τα  $R$  έχουν προέλθει από πολυώνυμα της ίδιας μορφής. Όταν  $t_1 \neq t_2$ , τα συστήματα (3.5) και (3.6) εκφράζουν μια διαταραχή του κύκλου Voronoi σε διαφαπτόμενους κύκλους ανάμεσα σε κάθε ζεύγος καμπυλών, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα 3.15. Στη σχέση  $R(t_1, t_2) = 0$  το  $t_2$  είναι πεπλεγμένη συνάρτηση του  $t_1$ , έστω  $f$ , δηλαδή  $f(t_1) = t_2$ . Δοθείσας της τιμής  $t_1$ , η  $f(t_1)$  είναι η τιμή του  $t_2$  μετά την επίλυση του (3.5), όπως φαίνεται στο δεξί σχήμα 3.15. Προφανώς  $f(\hat{t}) = \hat{t}$ , αφού πρόκειται για τριεφαπτόμενο κύκλο. Από το λήμμα 3.4.2 προκύπτει ότι  $t_1 < t' < \hat{t} \implies f(t_1) > f(t') > f(\hat{t})$ . Δηλαδή, καθώς το  $t_1$  πλησιάζει το  $\hat{t}$  από αριστερά, το  $t_2$  πλησιάζει το  $\hat{t}$  από δεξιά και  $\hat{t} \in [t_1, t_2]$ .

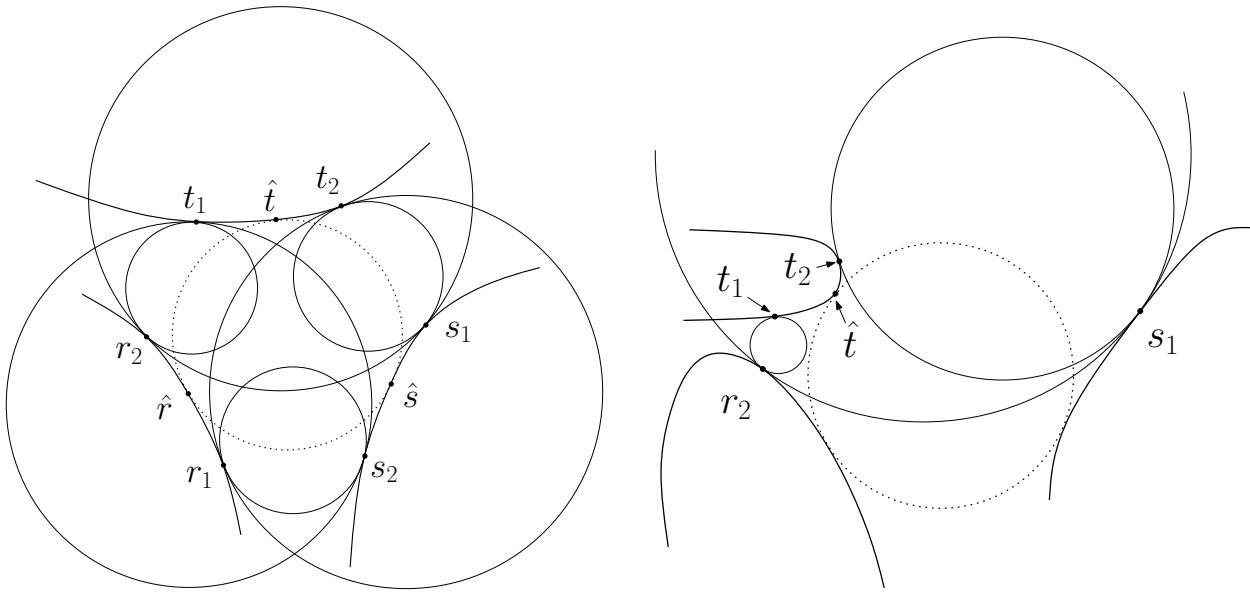
**Λήμμα 3.4.3** Με τον παραπάνω συμβολισμό  $f'(\hat{t}) = -1$ .

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων έχουμε ότι η  $\frac{df}{dt_1}$  υπάρχει και (από τον κανόνα της αλυσίδας):

$$\frac{df}{dt_1} = f'(t_1) = -\frac{\partial R/\partial t_1}{\partial R/\partial t_2} \quad (3.7)$$

Αφού  $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$  έχουμε ότι

$$\left. \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=\hat{t}} = \left. \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_1=t_2=\hat{t}},$$



**Σχήμα 3.15:** Αριστερά: Όλοι οι διεφαπτόμενοι κύκλοι για κάθε ζεύγος. Δεξιά: Το  $t_2$ , όταν υπολογίζεται απ' το  $t_1$ , περικλείει το  $\hat{t}$

επομένως

$$f'(\hat{t}) = - \frac{\partial R / \partial t_1}{\partial R / \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=\hat{t}} = -1. \quad \square$$

Ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης σε μορφή ψευδοκώδικα φαίνεται στο σχήμα 3.16.

**Θεώρημα 3.4.4 (Σύγκλιση)** *Ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης του σχήματος 3.16 συγκλίνει τετραγωνικά.*

**Απόδειξη.** Στην απόδειξη που ακολουθεί, τα  $t_1, t_2$  δεν είναι αόριστες μεταβλητές, αλλά θεωρούμε ότι έχουν πάρει αριθμητικές τιμές, όπως συμβαίνει κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Έστω  $\epsilon = |t_2 - t_1| = |f(t_1) - t_1|$  το σφάλμα μετά από μία επανάληψη της μεθόδου. Στην επόμενη επανάληψη το σφάλμα γίνεται  $\epsilon' = |t'_2 - t'_1| = |f(\frac{t_1+t_2}{2}) - \frac{t_1+t_2}{2}| = |f(\frac{t_1+f(t_1)}{2}) - \frac{t_1+f(t_1)}{2}|$  η ισοδύναμα:

$$\epsilon' = \left| f\left(t_1 + \frac{f(t_1) - t_1}{2}\right) - t_1 - \frac{f(t_1) - t_1}{2} \right|.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor το  $f\left(t_1 + \frac{f(t_1) - t_1}{2}\right)$  γύρω από το σημείο  $t_1$  παίρνουμε  $\epsilon' = \left| f(t_1) + \frac{f(t_1) - t_1}{2} f'(t_1) + \frac{(f(t_1) - t_1)^2}{8} f''(\xi) - t_1 - \frac{f(t_1) - t_1}{2} \right|$ , όπου  $\xi$  ανάμεσα στο  $t_1$  και  $\frac{t_1+t_2}{2}$ .

**Input:** Αρχικά διαστήματα  $[t_1, t_2], [r_1, r_2], [s_1, s_2]$  που περιέχουν μοναδική ρίζα  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{s})$  και  $\sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ .

**Output:** Υποδιαστήματα  $[t_1, t_2], [r_1, r_2], [s_1, s_2]$  των αρχικών, που περιέχουν τη  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{s})$  με  $t_2 - t_1 < \sigma$ .

**1 while true do**

**2** | Ξεκινώντας από το σημείο  $t_1$  της πρώτης καμπύλης, λύσε το σύστημα (3.5), επιλέγοντας τις ρίζες  $r_2, s_1, t_2$  που αντιστοιχούν στον εξωτερικό διεφαπτόμενο κύκλο;

**3** | Μετά τον υπολογισμό του  $t_2$ , λύσε το (3.6) ώστε να υπολογίσεις και τα διαστήματα  $[r_1, r_2]$  και  $[s_1, s_2]$ ;

**4** | Για κάθε διάστημα, επιβεβαίωσε ότι το αριστερό άκρο είναι μικρότερο από το δεξί, ανταλλάσσοντάς τα εν ανάγκη;

**5 if  $t_2 - t_1 < \sigma$  then**

**6 | break;**

**7** |  $t_1 := \frac{t_1 + t_2}{2}$ ; /\* το μέσον του  $[t_1, t_2]$  βρίσκεται αριστερά ή δεξιά του  $\hat{t}$  \*/

**8 end**

**Σχήμα 3.16:** Αλγόριθμος υποδιαίρεσης

Παρατηρείστε ότι, από τη θεωρία των αναπτυγμάτων κατά Taylor, η χρήση του  $\xi$  μάς επιτρέπει να παραλείψουμε λιγότερο σημαντικούς όρους. Τώρα το  $\epsilon'$  γίνεται:

$$\epsilon' = \left| \frac{f(t_1) - t_1}{2} (1 + f'(t_1)) + \frac{\epsilon^2}{8} f''(\xi) \right|.$$

Αναπτύσσουμε τώρα κατά Taylor το  $f'(t_1)$  γύρω από το σημείο  $\hat{t}$  και σε συνδυασμό με το λήμμα 3.4.3 έχουμε:

$$f'(t_1) = f'(\hat{t}) + (t_1 - \hat{t})f''(\xi') = -1 + (t_1 - \hat{t})f''(\xi'),$$

με  $\xi'$  ανάμεσα  $t_1$  και  $\hat{t}$ , ούτως ώστε να παραλείψουμε τους λιγότερο σημαντικούς όρους. Θυμηθείτε τώρα ότι  $\hat{t} \in [t_1, t_2]$  που σημαίνει ότι  $|t_1 - \hat{t}| \leq |t_2 - t_1| = |f(t_1) - t_1|$ .

Επομένως:

$$\epsilon' = \left| \frac{f(t_1) - t_1}{2} (t_1 - \hat{t})f''(\xi') + \frac{\epsilon^2}{8} f''(\xi) \right| \leq \frac{\epsilon^2}{2} |f''(\xi')| + \frac{\epsilon^2}{8} |f''(\xi)|.$$

Δεδομένου ότι η  $f''(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση, παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή μέσα στο κλειστό διάστημα  $[t_1, t_2]$ , άρα οι  $|f''(\xi)|$  και  $|f''(\xi')|$  φράσσονται από μία

θετική σταθερά  $C$ . Έτσι, παίρνουμε τελικά

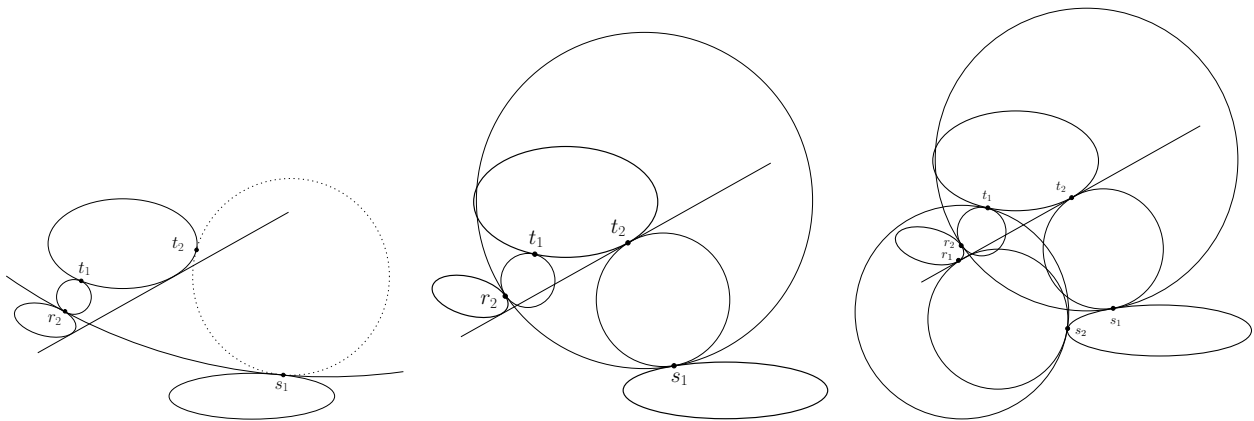
$$\epsilon' \leq \frac{5C}{8}\epsilon^2,$$

το οποίο δείχνει ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει τετραγωνικά σε ένα *σταθερό σημείο* όπου  $f(\hat{t}) = \hat{t}$ .  $\square$

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε μία ειδική περίπτωση που παραλείψαμε σιωπηλά μέχρι στιγμής. Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων ισχύει όταν  $\partial R/\partial t_2 \neq 0$ , διαφορετικά ο παρονομαστής στην (3.7) μηδενίζεται και η τετραγωνική σύγκλιση δεν μπορεί να εξασφαλιστεί με την παραπάνω απόδειξη. Ας δούμε συνοπτικά τι συμβαίνει όταν  $t_1 = \hat{t}$ . Αν  $\partial R/\partial t_2 = 0|_{t_2=\hat{t}}$ , τότε η εξίσωση  $R(t_1, t_2) = 0$  έχει πολλαπλή ρίζα ως προς  $t_2$ . Σε αυτή την περίπτωση, τουλάχιστον η τελευταία εξίσωση του συστήματος (3.5),  $B_3(t_2, s_1)$ , θα πρέπει να έχει πολλαπλή ρίζα ως προς  $t_2$ . Αυτό όμως γενικά δεν είναι δυνατό (βλ. σχήμα 3.4). Η εξίσωση της διχοτόμου καμπύλης είναι όπως είδαμε η απαλοίφουσα του συστήματος (3.1). Επομένως, πολλαπλή ρίζα της διχοτόμου συνεπάγεται πολλαπλή ρίζα της καθέτου  $N_t$  το οποίο δεν αληθεύει, εκτός και αν το κέντρο  $q$  του διεφαπτόμενου κύκλου βρίσκεται πάνω στην εξειλιγμένη της καμπύλης [2]. Μάλιστα, τότε παρότι υπάρχει πολλαπλή ρίζα, δεν πρόκειται γι' αυτή που αντιστοιχεί στον εξωτερικό διεφαπτόμενο κύκλο, όταν το  $q$  βρίσκεται εκτός της εστίας (κάτι που ισχύει σίγουρα για μη τεμνόμενες εστίες). Οι ιδέες αυτής της παραγράφου σχετίζονται στενά με την πρόταση 5.3 του [13] που χονδρικά μάς λέει ότι μια τέτοια κορυφή Voronoi είναι μη ιδιόμορφο σημείο.

### Διάστημα εκκίνησης

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε πώς μπορούμε να βρούμε ένα αρχικό κουτί που να περιέχει μοναδική λύση. Όταν υπάρχει εξωτερικός κύκλος Voronoi, μπορούμε να βρούμε ένα αρχικό διάστημα που να περιέχει το σημείο επαφής του, αν υπολογίσουμε τις εξωτερικές εφαπτομένες για κάθε ζεύγος εστιών και πάρουμε την τομή του εσωτερικού των ΚΠ τους. Έχοντας υπολογίσει τα αρχικά διαστήματα, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε σημείο  $t_1$  για να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο. Στην περίπτωση που οι εστίες έχουν κοινή τομή, τότε περιοριζόμαστε σε αυτή (για τον εσωτερικό κύκλο). Όπως είδαμε, θα πρέπει αρχικά να υπάρχει ακολουθία τόξων με θετική φορά και ακόμα, δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχει όντως εσωτερικός κύκλος Voronoi. Ωστόσο, αν ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ρίζα, τότε ο κύκλος υπάρχει. Αυ-



**Σχήμα 3.17:** Αριστερά:  $\hat{y} \in [y_1, y_2]$ ; Μέση: οπισθοδρόμηση; Δεξιά: κανονικοποιημένα διαστήματα

τό, διότι ο αλγόριθμος υπολογίζει σε κάθε βήμα τον Απολλώνιο κύκλο δύο εστιών, δηλαδή έναν διαφαπτόμενο δίσκο Voronoi (εσωτερικό ή εξωτερικό).

Ίσως χρειαστεί (ανάλογα με την επιλογή του  $t_1$ ) να κανονικοποιήσουμε τα αρχικά διαστήματα, έτσι ώστε αυτά να περιέχουν τις λύσεις των (3.5) και (3.6), όπως φαίνεται στο σχήμα 3.15. Ξεκινάμε με μια αρχική τιμή  $t_1$  και λύνουμε τις εξισώσεις (3.5) και (3.6) με τη σειρά που δίνονται. Σε κάποιο βήμα, έχουμε υπολογίσει μια τιμή της παραμέτρου  $x$ , έστω  $\hat{x}$  και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον Απολλώνιο κύκλο στο σημείο  $\hat{y}$  της επόμενης καμπύλης, δηλαδή υπολογίζουμε το  $\mathcal{A}_{xy}(\hat{x}, \hat{y})$ . Αν  $\hat{y} \in [y_1, y_2]$ , τότε ενημερώνουμε το κατάλληλο άκρο του διαστήματος σε  $\hat{y}$  (αριστερό σχήμα 3.17). Το κατάλληλο άκρο βρίσκεται ανάλογα με το πώς κινείται το  $\hat{y}$ , καθώς το  $\hat{x}$  κινείται από το  $x_1$  στο  $x_2$ . Αν  $\hat{y} \notin [y_1, y_2]$  (διακεκομμένος κύκλος στο αριστερό σχήμα 3.17), τότε γυρνάμε «προς τα πίσω», και ενημερώνουμε το  $\hat{x}$  υπολογίζοντας τον Απολλώνιο κύκλο που εφάπτεται στο κατάλληλο άκρο του  $[y_1, y_2]$  (μεσαίο σχήμα 3.17). Όταν υπολογιστούν όλοι οι διαφαπτόμενοι κύκλοι, έχουμε καταλήξει σε κανονικοποιημένα διαστήματα, όπως στο δεξί σχήμα 3.17. Στην περίπτωση που ψάχνουμε εσωτερικό κύκλο Voronoi και αυτός δεν υπάρχει, τότε η κανονικοποίηση επιστρέφει κενό διάστημα πάνω σε κάποια εστία. Στην περίπτωση που ψάχνουμε εσωτερικό κύκλο, γίνεται χρήση των τεχνικών της ενότητας 3.1.

Ο αλγόριθμος κανονικοποίησης σε μορφή ψευδοκώδικα δίνεται στο σχήμα 3.18.

Βλέπουμε ότι το πλήθος ενημερώσεων των διαστημάτων είναι τετραγωνικό ως προς τον αριθμό εστιών που εμπλέκονται. Ο αριθμός αυτός στη δική μας περίπτωση

**Input:** Αρχικά διαστήματα  $[t_1, t_2], [r_1, r_2], [s_1, s_2]$  που περιέχουν τη ρίζα  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{s})$ .

**Output:** Ικανώς μικρά διαστήματα  $[t_1, t_2], [r_1, r_2], [s_1, s_2]$ , ώστε να περιέχουν τις λύσεις των (3.5) και (3.6) (αριστερό σχήμα 3.15)

```

1  $X := [t_1, r_2, s_1, t_2, r_1, s_2]$ ; /* λίστα με κυκλική δεικτοδότηση (modulo 6) */
2  $E := [t, r, s, t, r, s]$ ;
3 for  $i := 1$  to 5 do
4   βρες τον  $\mathcal{A}_{E[i-1]E[i]}(X[i], z)$ , δηλαδή τον Απολλώνιο κύκλο των  $E[i-1]$  και  $E[i]$  που
   εφάπτεται στα σημεία  $X[i]$  και  $z$  αντίστοιχα;
5   if  $z$  ανάμεσα στο  $X[i]$  και το  $X[i+3]$  then
6      $X[i] := z$ 
7   else
8     for  $j := i$  downto 1 do
9       βρες τον  $\mathcal{A}_{E[j]E[j-1]}(X[j], z)$ ;
10       $X[j-1] := z$ ;
11    end
12  end
13 end

```

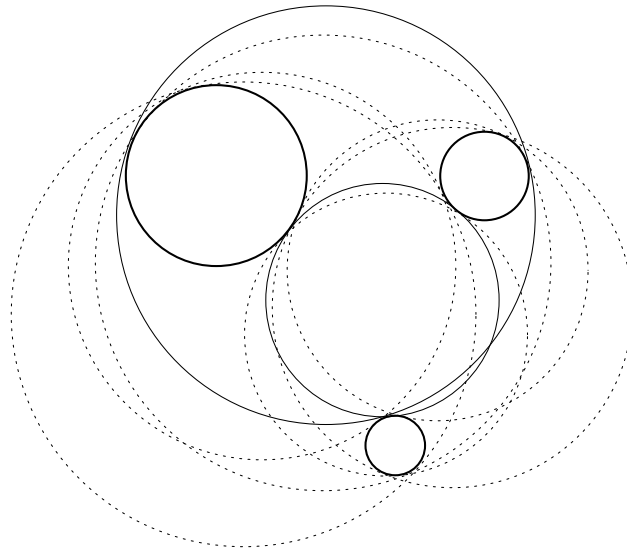
**Σχήμα 3.18:** Αλγόριθμος κανονικοποίησης διαστημάτων

είναι μικρός, επειδή έχουμε μόνο τρεις εστίες. Το μειονέκτημα είναι ότι ο παραπάνω αλγόριθμος είναι δύσκολος στην υλοποίηση, εξαιτίας της πεπερασμένης ακρίβειας με την οποία αναπαριστούμε τα άκρα των διαστημάτων. Για το λόγο αυτό προτείνουμε ένα εναλλακτικό σχήμα κανονικοποίησης, που απ' ό,τι φάνηκε στην υλοποίησή μας δουλεύει πολύ καλά, το οποίο όμως ενδέχεται να χρειαστεί περισσότερες ενημερώσεις διαστημάτων. Βασίζεται σε δυαδική αναζήτηση: αντί για το  $t_1$ , ξεκινάμε με ένα τυχαίο σημείο  $t$  εσωτερικό του  $[t_1, t_2]$ , έτσι ώστε οι επικείμενοι υπολογισμοί του  $r$  και  $s$  να δώσουν τιμές εντός των  $[r_1, r_2]$  και  $[s_1, s_2]$ . Καθώς το  $t$  κινείται από το  $t_1$  στο  $t_2$ , το  $r$  κινείται από το  $r_2$  στο  $r_1$  και στο  $s$  κινείται από το  $s_1$  στο  $s_2$ . Έτσι, αποκόπτουμε ένα κατάλληλο ακρινό κομμάτι του  $[t_1, t_2]$ , ούτως ώστε τα  $r$  και  $s$  να πέφτουν πάντα μέσα στα  $[r_1, r_2]$  και  $[s_1, s_2]$  αντίστοιχα.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι σε περίπτωση που υπάρχουν δύο κύκλοι Voronoi, εμείς επιλέγουμε κατάλληλο υποδιάστημα ώστε να θεωρούμε μόνο τον κύκλο με τη θετική φορά (εφάπτεται με τη σειρά στις  $C_t, C_r, C_s$ ).

### 3.4.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα του Απολλώνιου

Στην περίπτωση που εστίες είναι απλούστερες καμπύλες, όπως κύκλοι, μπορούμε να αποφύγουμε τελείως την υποδιαίρεση. Ας πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση τριών κύκλων του επιπέδου όπου ζητείται να βρεθούν οι κύκλοι που εφάπτονται σε αυτούς. Το πρόβλημα αυτό είχε μελετήσει ο «Απολλώνιος ο Περγαίος» (262–190 π.Χ.) στο έργο του «Επαφαί». Θεωρούμε τους κύκλους  $C_t(0, 0, 1)$ ,  $C_r(3, 0, 1/2)$ ,  $C_s(2, -3, 1/3)$  όπου με  $C_i(x, y, r)$  συμβολίζουμε έναν κύκλο με κέντρο το  $(x, y)$ , ακτίνα  $r$ , και παράμετρο  $i$  (παίρνουμε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα έναντι συμβολικών εξισώσεων χάριν συντομίας). Για τη διχοτόμο καμπύλη των κύκλων βρίσκουμε ότι:  $B_1(t, r) = (r + 3t)(7tr - 5)$ ,  $B_2(r, s) = (18rs + r + 11s - 18)(5rs - 18r - 18s - 7)$  και  $B_3(s, t) = (8ts + 9t + 9s - 4)(9ts - 10t - 2s - 9)$ . Οι εξισώσεις της διχοτόμου παραγοντοποιούνται, έτσι θεωρούμε τον κάθε παράγοντα χωριστά και λύνουμε  $2^3 = 8$  απλούστερα συστήματα της μορφής (3.5). Ας επιλέξουμε το πρώτο από αυτά τα συστήματα:  $r_2 + 3t_1 = 18r_2s_1 + r_2 + 11s_1 - 18 = 8t_2s_1 + 9t_2 + 9s_1 - 4 = 0$ . Αφού κάθε εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ως προς έναν άγνωστο, μπορούμε να υπολογίσουμε μία κλειστή μορφή για το  $t_2$ , ως συνάρτηση του  $t_1$ , δηλαδή  $t_2 = f(t_1) = (1/3)(243t_1 + 118)/(154t_1 - 81)$ . Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε το σταθερό σημείο σύγκλισης από τη σχέση  $f(t) = t$  η οποία δίνει την τετραγωνι-



**Σχήμα 3.19:** Το πρόβλημα του Απολλώνιου

κή εξίσωση  $231t^2 - 243t - 59 = 0$ . Οι δύο ρίζες του πολυωνύμου αντιστοιχούν στο σημείο επαφής του εξωτερικά τριεφαπτόμενου κύκλου και σε εκείνο ενός κύκλου που εφάπτεται στις εστίες και που περιέχει δύο απ' αυτές (συμπαγής γραμμή στο σχήμα 3.19). Άλλα πολυώνυμα μπορεί να μην αντιστοιχούν απαραίτητα σε τριεφαπτόμενους κύκλους, όπως είδαμε στο σχήμα 3.8. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα του Απολλώνιου λύνοντας το πολύ 8 τριώνυμα.

Από τους δύο παράγοντες της διχοτόμου καμπύλης δύο κύκλων, ο ένας αντιστοιχεί σε μία υπερβολή τα σημεία της οποίας είναι κέντρα διεφαπτόμενων κύκλων που αφήνουν τις εστίες από την ίδια πλευρά (δηλαδή και οι δύο εστίες βρίσκονται εκτός, είτε και οι δύο εστίες βρίσκονται εντός των διεφαπτόμενων κύκλων), και ο άλλος παράγοντας αντιστοιχεί σε μία υπερβολή τα σημεία της οποίας είναι κέντρα διεφαπτόμενων κύκλων που αφήνουν τις εστίες εκατέρωθεν αυτών. Παρατηρείστε ότι ένας τριεφαπτόμενος κύκλος, έχει *άρτιο* πλήθος (δηλαδή 0 ή 2) από ζεύγη εστιών που βρίσκονται *εκατέρωθεν* του. Έτσι, είναι δυνατό να επιλέξουμε μόνο τα τριώνυμα που αντιστοιχούν σε τριεφαπτόμενους κύκλους, συνολικά 4 τριώνυμα που μας δίνουν τελικά τις 8 λύσεις του προβλήματος του Απολλώνιου.







Τα πολυώνυμα  $N_t$ ,  $N_r$ , και  $N_s$  είναι συνολικού βαθμού 5, γραμμικά ως προς  $x, y$  και βαθμού 4 στην παράμετρο της καμπύλης. Τα πολυώνυμα  $M_{tr}$  και  $M_{ts}$  είναι συνολικού βαθμού 9, γραμμικά ως προς  $x$  και  $y$  και βαθμού 4 στις παραμέτρους της καμπύλης. Πρώτα απαλοΐφουμε το  $r$  από τα  $M_{tr}$  και  $N_r$ :

$$R_1(x, y, t) = \text{Res}_r(M_{tr}(x, y, t, r), N_r(x, y, r)).$$

Πρόκειται για πολυώνυμο συνολικού βαθμού 22, συγκεκριμένα βαθμού 6 ως προς  $x$ , ως προς  $y$ , και ως προς  $x, y$ , και βαθμού 16 ως προς  $t$ . Ομοίως για τα  $M_{ts}, N_s$  παίρνουμε:

$$R_2(x, y, t) = \text{Res}_s(M_{ts}(x, y, t, s), N_s(x, y, s)),$$

του οποίου οι βαθμοί παρουσιάζουν την ίδια μορφή όπως προηγουμένως. Απομένει να υπολογίσουμε το τελικό πολυώνυμο στο  $\mathbb{Z}[t]$ :

$$R_3(t) = \text{Res}_{x,y}(R_1(x, y, t), R_2(x, y, t), N_t(x, y, t)).$$

Έστω  $N_t = D(t)y + A(t)x + C(t)$ , όπου  $D(t) = H_t(G_t H_t' - G_t' H_t)$  βαθμού 4. Για να υπολογίσουμε το  $R_3$ , θα λύσουμε το  $N_t$  ως προς  $y$  και θα αντικαταστήσουμε στις  $R_1, R_2$ . Αυτό εισάγει παρονομασιές, τους οποίους απαλοΐφουμε πολλαπλασιάζοντας με  $D(t)^6$ . Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την απαλοΐφουσα Sylvester ως προς  $x$ . Κατά τη διάρκεια αυτών των πράξεων εφαρμόζουμε την πρόταση 3.5.1 ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{xy}(D^6 R_1, D^6 R_2, y + \frac{Ax + C}{D}) &= D^{36} D^{36} \text{Res}_{xy}(R_1, R_2, y + \frac{Ax + C}{D}) \\ &= D^{36} \text{Res}_{xy}(R_1, R_2, D(y + \frac{Ax + C}{D})) \quad (3.8) \\ &= D^{36} R_3. \end{aligned}$$

Από την πρόταση 3.5.1, ο βαθμός της απαλοΐφουσας ως προς  $t$  είναι  $16(6 \cdot 1) + 16(6 \cdot 1) + 4(6 \cdot 6) = 336$ , ωστόσο βλέπουμε ότι το  $(H_t(G_t H_t' - G_t' H_t))^{36}$ , δηλαδή ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του  $y$  στο  $N_t$ , εμφανίζεται ως παράγοντας. Επιπλέον, αντικαθιστώντας το  $y$  στις  $R_1$  και  $R_2$ , παίρνουμε πολυώνυμο της μορφής  $H_t^2 c_6 x^6 + H_t c_5 x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + \dots + c_0$ . Από το λήμμα 3.5.2, προκύπτει ότι η απαλοΐφουσα δύο τέτοιων πολυωνύμων περιέχει το  $H_t^4$  ως παράγοντα. Επομένως, ο βαθμός του  $\Pi$  είναι  $336 - 4 \cdot 36 - 2 \cdot 4 = 184$ .  $\square$

Βλέπουμε ότι και η παραπάνω μέθοδος δίνει το ίδιο φράγμα 184 στο πλήθος τριεφαπτόμενων κύκλων με αυτό που παίρνουμε χρησιμοποιώντας δέσμες (βλ. ενό-

τητα 2.6). Το ότι το φράγμα είναι σφιχτό (και ότι το  $\Pi$  δεν παραγοντοποιείται) μπορούμε και εδώ να το επιβεβαιώσουμε με ένα παράδειγμα. Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι το ερώτημα για το μέγιστο πλήθος *πραγματικών* ριζών που αντιστοιχούν σε πραγματικούς τριεφαπτόμενους κύκλους παραμένει ανοιχτό.

Για καμπύλες γενικού βαθμού, βασιζόμενοι στην πρόταση 3.5.1 οδηγούμαστε στο παρακάτω:

**Πόρισμα 3.5.4** Δίνονται  $R_0, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[x, y]$ , όπου ο συνολικός βαθμός των  $R_1$  και  $R_2$  είναι  $n$  ως προς  $x$ , ως προς  $y$ , και ως προς  $x$  και  $y$  μαζί, και  $R_0 = Dy + Ax + C$ , όπου  $AD \neq 0$ . Τότε

$$\text{Res}_x(\text{Res}_y(R_0, R_1), \text{Res}_y(R_0, R_2)) = D^{n^2} \text{Res}_{xy}(R_0, R_1, R_2).$$

**Πόρισμα 3.5.5** Ο βαθμός της απαλοίφουσας του (3.4) για γενικές παραμετρικές καμπύλες της μορφής (2.1) φράσσεται από το

$$(3d - 2)(5d - 2)(9d - 2),$$

αφού απαλείψουμε τον παράγοντα  $(H_t(G_t H'_t - G'_t H_t))^{(5d-2)^2}$ .

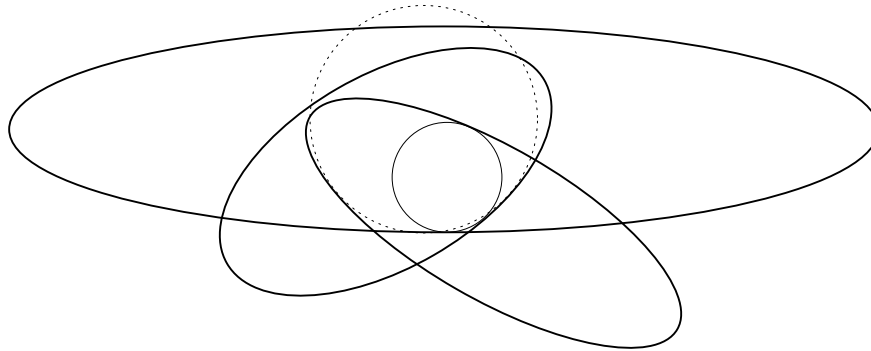
Μια πιο προσεκτική ανάλυση λαμβάνοντας υπόψιν αλληλοακυρώσεις μεταξύ των όρων της ορίζουσας μπορεί να δώσει ένα πιο σφιχτό άνω φράγμα, ωστόσο είναι κάτι μη προφανές.

Αν επιλύσουμε το πολυώνυμο της απαλοίφουσας του συστήματος (3.4), παίρνουμε μόνο μία συντεταγμένη ( $t$ ) από τα διανύσματα λύσεων (αναπαριστώντας τη με ένα διάστημα που την περιέχει). Ένας τρόπος για να βρούμε και τις υπόλοιπες συντεταγμένες είναι π.χ. να αντικαταστήσουμε την τιμή (διάστημα) που βρήκαμε για το  $t$  στην εξίσωση της διχοτόμου των  $C_t$  και  $C_r$ , και να βρούμε την τιμή που αντιστοιχεί στο  $r$  (με τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.1).

Ο υπολογισμός της απαλοίφουσας μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε και τις *εκφυλισμένες* περιπτώσεις, π.χ. τέσσερις εστίες που εφάπτονται στον ίδιο κύκλο Voronoi. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται αυτό παρουσιάζεται στην ενότητα 3.6.4.

### 3.5.1 Επιλογή της κατάλληλης ρίζας

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε το πώς επιλέγουμε, ανάμεσα σε όλες τις λύσεις του πολυωνυμικού συστήματος που αντιστοιχούν σε σημεία επαφής  $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{s})$  ενός τριεφαπτόμενου κύκλου, τη λύση που αντιστοιχεί στον κύκλο Voronoi  $V_{trs}$ .



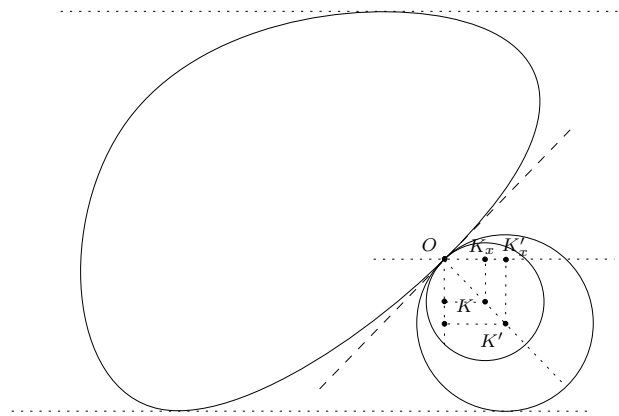
**Σχήμα 3.20:** Εσωτερικός τριεφαπτόμενος κύκλος

Πρώτα απορρίπτουμε τις λύσεις που αντιστοιχούν σε κύκλους με αρνητική φορά. Θεωρούμε τα σημεία επαφής  $p_{\hat{t}}, p_{\hat{r}}, p_{\hat{s}}$  που αντιστοιχούν σε μια λύση  $\hat{t}, \hat{r}, \hat{s}$ . Τα σημεία αυτά θα πρέπει να ικανοποιούν το  $CCW(p_{\hat{t}}, p_{\hat{r}}, p_{\hat{s}})$ .

Τώρα επιλέγουμε μόνο τον εξωτερικό και τον εσωτερικό τριεφαπτόμενο κύκλο, απορρίπτοντας τους υπόλοιπους. Τα σημεία επαφής ορίζουν έναν εξωτερικό τριεφαπτόμενο κύκλο αν και μόνο αν η εφαπτομένη σε κάθε σημείο επαφής διαχωρίζει την προσκείμενη εστία από τα άλλα δύο σημεία επαφής (βλ. σχήμα 3.10). Ακόμα και αν η εφαπτομένη τέμνει τις άλλες εστίες (δε φαίνεται στο παράδειγμα), τα σημεία επαφής διαχωρίζονται και πάλι. Ο έλεγχος για το αν τα σημεία επαφής ορίζουν εσωτερικό κύκλο μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας το λήμμα 3.1.8 (βλ. ενότητα 3.1.2). Σημειώτεον ότι σε αυτή την περίπτωση, δεν ισχύουν ανάλογα επιχειρήματα με την περίπτωση του εξωτερικού κύκλου (δηλαδή ότι τρία σημεία επαφής ορίζουν εσωτερικά τριεφαπτόμενο κύκλο αν και μόνο αν αυτά βρίσκονται στην ίδια πλευρά της εφαπτομένης με την εστία και εντός κάθε εστίας), διότι ο εσωτερικός κύκλος ενδέχεται να βρίσκεται « τοπικά » εντός της εστίας, αλλά όχι « ολικά » (π.χ. ο διακεκομμένος κύκλος του σχήματος 3.20).

### 3.6 Αποφασίζοντας το InCircle

Επειδή ο κύκλος Νομοποι εκφράζεται αλγεβρικά, δεν είναι προφανές πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχετική του θέση ως προς μια τέταρτη εστία, π.χ. εξετάζοντας τις κοινές τους εφαπτομένες. Γι' αυτό, μοντελοποιούμε τον έλεγχο του πορίσματος 1.1.9 ως έναν έλεγχο για το αν ένας κύκλος περιέχεται μέσα σε έναν άλλον.



**Σχήμα 3.21:** Εφαπτόμενοι κύκλοι σε μία εστία, από την ίδια πλευρά της κοινής τους εφαπτομένης

**Λήμμα 3.6.1** Έστω δύο κύκλοι που εφάπτονται μεταξύ τους, τους οποίους η εφαπτομένη στο κοινό σημείο επαφής αφήνει από την ίδια πλευρά. Τότε, αυτοί οι κύκλοι είτε ταυτίζονται, είτε αυτός με τη μικρότερη ακτίνα περιέχεται σ' αυτόν με τη μεγαλύτερη.

**Απόδειξη.** Δείτε το σχήμα 3.21. Θεωρούμε όλους τους εφαπτόμενους κύκλους στο συγκεκριμένο σημείο επαφής που βρίσκονται από την ίδια πλευρά κατά αύξουσα ακτίνα και βλέπουμε ότι αυτοί με μικρότερη ακτίνα περιέχονται σε αυτούς με μεγαλύτερη. Πιο αυστηρά, μπορούμε να πούμε ότι ο κύκλος με τη μικρότερη ακτίνα έχει μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας, επομένως βρίσκεται « τοπικά » εντός αυτού με τη μεγαλύτερη [56]. Αναγκαστικά θα είναι και « ολικά » εντός, αφού σε διαφορετική περίπτωση οι κύκλοι θα διασταυρώνονταν που είναι άτοπο, διότι οι κύκλοι εφάπτονται.  $\square$

**Λήμμα 3.6.2** Έστω δύο εφαπτόμενοι κύκλοι, τους οποίους η εφαπτομένη στο σημείο επαφής αφήνει από την ίδια πλευρά. Τότε, για να συγκρίνουμε τις ακτίνες τους αρκεί να συγκρίνουμε τις προβολές των κέντρων τους στον οριζόντιο άξονα (ή του κατακόρυφο σε περίπτωση που οι πρώτες συμπίπτουν).

**Απόδειξη.** Δείτε το σχήμα 3.21. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή  $O$  το σημείο επαφής. Έστω  $K$  και  $K'$  τα κέντρα των κύκλων προς σύγκριση. Έστω  $K_x, K_y$  και  $K'_x, K'_y$  οι προβολές των  $K$  και  $K'$  στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα  $OKK_x$  και  $OK'K'_x$  (αντίστοιχα  $OKK_y$  και  $OK'K'_y$ ) είναι όμοια και η υποτείνουσά τους ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Επο-

μένως, για να συγκρίνουμε τις ακτίνες των κύκλων, αρκεί να συγκρίνουμε τις προβολές των κέντρων τους.  $\square$

**Λήμμα 3.6.3** Έστω 3 γραμμικές εξισώσεις  $n_i := a_i x + b_i y + c_i = 0$ ,  $i = 1 \dots 3$ . Έστω  $\{x_{ij} = X_{ij}/D_{ij}, y_{ij} = Y_{ij}/D_{ij}\}$  οι λύσεις των  $\{n_i, n_j\}$  ως προς  $x, y$ . Τότε ισχύει

$$x_{12} - x_{13} = \frac{b_1 Q_{123}}{D_{12} D_{13}},$$

όπου  $Q_{123}$  η ορίζουσα του επαυξημένου πίνακα των  $n_1, n_2, n_3$ .

**Απόδειξη.** Η απόδειξη γίνεται με την εκτέλεση των πράξεων.  $\square$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τις εξισώσεις καθέτου τριών εστιών  $C_t, C_r, C_h$ , παίρνουμε

$$x_{ts} - x_{th} = \frac{H_t^3 Y_t' Q_{trh}}{D_{tr} D_{th}},$$

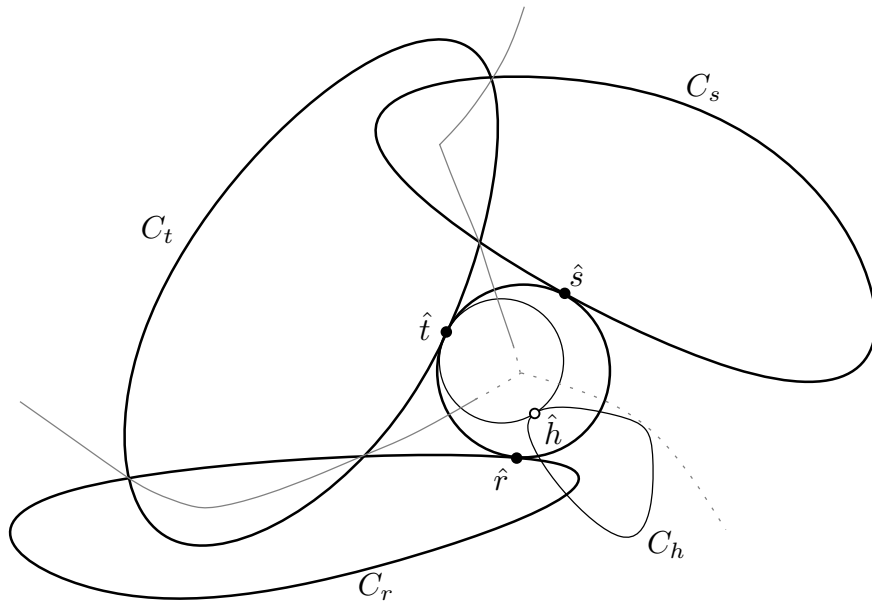
όπου  $D_{tr} = H_t H_r \bar{D}_{tr}$ , και  $\bar{D}_{tr}$  συνολικού βαθμού  $2(2d-2)$ ,  $2d-2$  σε κάθε παράμετρο (ομοίως και για το  $D_{th}$ ), και  $Q_{trh}$  ορίζεται όπως το  $Q_{trs}$  του συστήματος (3.3).

**Λήμμα 3.6.4** Για να συγκρίνουμε τα κέντρα των κύκλων του λήμματος 3.6.2 και να βρούμε αν ο κύκλος  $B_{tr}$  που εφάπτεται στις  $C_t, C_r$  περιέχεται στον κύκλο  $B_{th}$  που εφάπτεται στις  $C_t, C_h$  (λήμμα 3.6.1), αρκεί να υπολογίσουμε τα πρόσημα των  $Q_{trh}$ ,  $D_{tr}$  και  $D_{th}$ .

**Απόδειξη.** Το πρόσημο της  $H_t$  είναι γνωστό, διότι παραμένει σταθερό (έχουμε υποθέσει ότι οι παρονομαστές των παραμετρικών εξισώσεων δε μηδενίζονται). Έστω  $\rho(B)$  η ακτίνα ενός κύκλου  $B$ . Έστω ότι  $Y_t' > 0$  σε ένα σημείο  $\hat{t}$ . Τότε  $x_{tr} < x_{th} \Rightarrow \rho(B_{tr}) < \rho(B_{th})$ , άρα ο  $B_{tr}$  περιέχεται στον  $B_{th}$  (σχήμα 3.21). Έστω τώρα ότι  $Y_t' < 0$ . Τότε  $x_{tr} < x_{th} \Rightarrow \rho(B_{tr}) > \rho(B_{th})$ , άρα ο  $B_{tr}$  περιέχει τον  $B_{th}$ . Επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε το πρόσημο του  $Y_t$ .  $\square$

### 3.6.1 Διένεξη με εξωτερικό δίσκο Voronoi

Στην περίπτωση που ο δίσκος Voronoi  $V_{trs}$  είναι εξωτερικός, μπορούμε να αποφασίσουμε αν αυτός βρίσκεται σε διένεξη με μία εστία  $C_h$  με το παρακάτω λήμμα:



**Σχήμα 3.22:** Λήμμα 3.6.5: διένεξη  $C_h$  με εξωτερικό δίσκο Voronoi

**Λήμμα 3.6.5** (σχήμα 3.22) Δοδειςών των εσίων  $C_t, C_r, C_s$ , έστω  $V_{trs}$  ο εξωτερικός δίσκος Voronoi και  $\hat{t}$  το σημείο επαφής του στην  $C_t$ . Έστω  $C_h$  μια τέταρτη εστία. Αν  $\hat{t} \in C_h^\circ$ , τότε η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$  (εξ ορισμού). Αν η εφαπτομένη της  $C_t$  στο  $\hat{t}$  είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των  $C_t$  και  $C_h$ , τότε η  $C_h$  δε βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ . Διαφορετικά, έστω  $B_{th}$  ένας εξωτερικός Απολλώνιος (διεφαπτόμενος) δίσκος των  $C_t$  και  $C_h$ , που εφάπτεται στα  $\hat{t}$  (και  $\hat{h}$  αντίστοιχα). Τότε η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$  αν και μόνο αν ο  $B_{th}$  περιέχεται στο  $V_{trs}^\circ \cup \hat{t}$ .

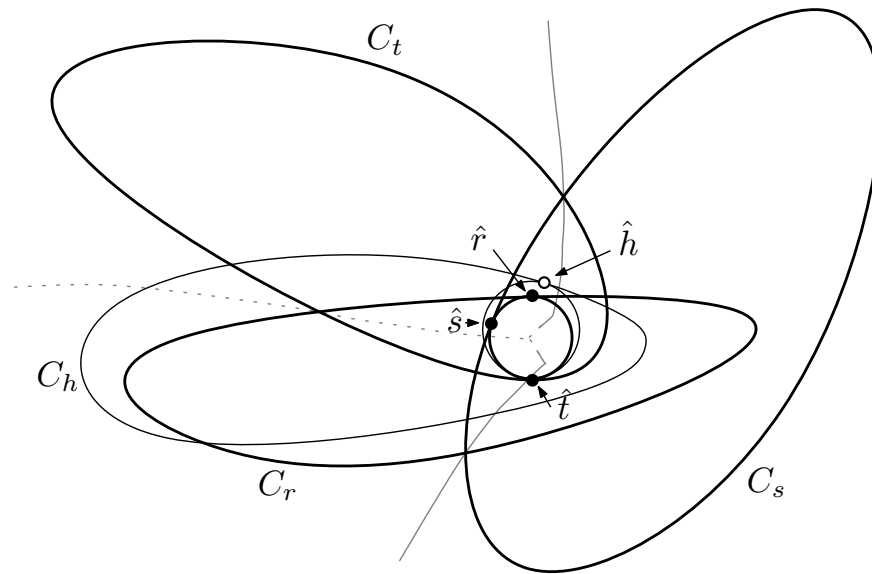
**Απόδειξη.** Καταρχήν, αν η εφαπτομένη της  $C_t$  στο  $\hat{t}$  είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των  $C_t$  και  $C_h$ , τότε η  $C_h$  δε βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ , διότι η εστία και ο δίσκος Voronoi βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα.

( $\Leftarrow$ ). Έστω ότι ο  $B_{th}$  περιέχεται στο  $V_{trs}^\circ \cup \hat{t}$ . Τότε και το  $\hat{h}$  ανήκει στο  $V_{trs}^\circ \cup \hat{t}$ , άρα ο  $V_{trs}$  τέμνει το εσωτερικό της  $C_h$  και επομένως, σύμφωνα με τον πόρισμα 1.1.9, η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ .

( $\Rightarrow$ ). Αν η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ , τότε αυτός τέμνει το εσωτερικό της, άρα ο  $B_{th}$  περιέχεται στο  $V_{trs}^\circ \cup \hat{t}$ .  $\square$

Ο Απολλώνιος δίσκος επιλέγεται (ανάμεσα σε όλους τους διεφαπτόμενους κύκλους) χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά επιχειρήματα της ενότητας 3.1 και ο έλεγχος με τους κύκλους γίνεται χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.6.4. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ο  $B_{th}$  (π.χ. το  $\hat{t}$  δε βρίσκεται εντός του ΚΠ των  $C_t$  και  $C_h$ ), η  $C_h$  δε βρίσκεται





**Σχήμα 3.23:** Λήμμα 3.6.6: διένεξη εστίας  $C_h$  με εσωτερικό δίσκο Voronoi. Οι ακμές Voronoi δίνονται με συμπαγή γραμμή, η περιοχή διένεξης με διακεκομμένη

σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ .

### 3.6.2 Διένεξη με εσωτερικό δίσκο Voronoi

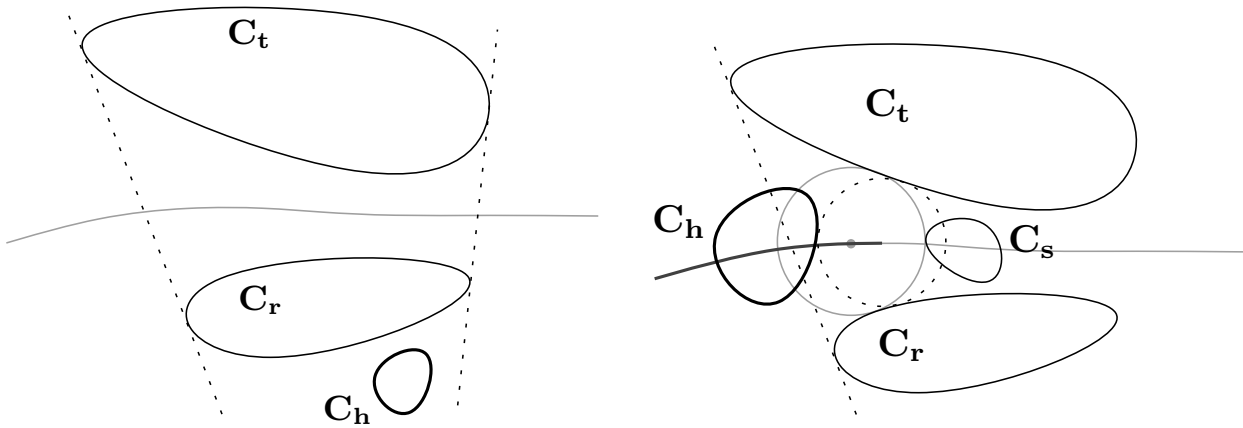
Τεμνόμενες εστίες ενδέχεται να επιδέχονται και εσωτερικά τριεφαπτόμενο κύκλο. Σε αυτή την περίπτωση, το INCIRCLE μπορεί να απαντηθεί με το εξής λήμμα:

**Λήμμα 3.6.6** Δοδειςών των εστιών  $C_t, C_r, C_s$ , έστω  $V_{trs}$  ο εσωτερικός δίσκος Voronoi και  $\hat{t}$  το σημείο επαφής του στην  $C_t$ . Έστω  $C_h$  η εστία προς εξέταση. Αν  $\hat{t} \notin C_h$ , τότε η  $C_h$  δε βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$  (εξ ορισμού). Διαφορετικά, έστω  $B_{th}$  ένας εσωτερικός διεφαπτόμενος δίσκος των  $C_t$  και  $C_h$ , που να εφάπτεται στο  $\hat{t}$  (αντίστοιχα στο  $\hat{h}$ ). Τότε η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$  αν και μόνο αν ο  $V_{trs}$  περιέχεται στο  $B_{th}^\circ \cup \hat{t}$ .

**Απόδειξη.** Δείτε σχήμα 3.23.

( $\Leftarrow$ ). Αν ο  $V_{trs}$  περιέχεται στο  $B_{th}^\circ \cup \hat{t}$ , τότε βρίσκεται στο εσωτερικό του  $B_{th}$ , εκτός από το σημείο  $\hat{t}$ . Αυτό σημαίνει ότι  $V_{trs} \in C_h^\circ$ , αφού ο  $B_{th}$  και ο  $V_{trs}$  έχουν κοινό σημείο επαφής το  $\hat{t}$  και επίσης, και οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στην  $C_t$ . Επομένως, σύμφωνα με το πόρισμα 1.1.9, η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ .

( $\Rightarrow$ ). Αν η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ , τότε  $V_{trs} \in C_h^\circ$ . Οι κύκλοι  $B_{th}$  και  $V_{trs}$  έχουν κοινό σημείο επαφής το  $\hat{t}$  και αφού ο  $B_{th}$  ακουμπά την  $C_h$  (στο  $\hat{h}$ ), τότε ο  $V_{trs}$  θα περιέχεται στο  $B_{th}^\circ \cup \hat{t}$ .  $\square$



**Σχήμα 3.24:** Αριστερά:  $S_{tr}(C_h) = \emptyset$ . Δεξιά:  $S_{tr}(C_h) = (0, a)$  και η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$

Στην περίπτωση που ο εσωτερικός διαφαπτόμενος κύκλος  $B_{th}$  δεν υπάρχει, αντί για το  $B_{th}^\circ$  θεωρούμε τον εφαπτόμενο κύκλο με ακτίνα ίση με την ακτίνα του μέγιστου δίσκου (του οποίου το κέντρο ανήκει στο μέσο άξονα της  $C_t$ ). Οι μέγιστοι δίσκοι μπορούν να υπολογιστούν θεωρώντας τη διχοτόμο της καμπύλης και του εαυτού της, υπολογίζοντας τους διαφαπτόμενους κύκλους και επιλέγοντας αυτόν με τη μικρότερη ακτίνα (στην ειδική περίπτωση κύκλων που ταυτίζονται μπορούμε να θεωρήσουμε το σημείο της εξειλιγμένης [11]).

### 3.6.3 Διάταξη των σημείων επαφής

Στις προηγούμενες υποενότητες δείξαμε πώς μπορούμε να αποφασίσουμε τη διένεξη συγκρίνοντας ακτίνες κύκλων. Ωστόσο, μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ιδιότητά μας επιτρέπει να γλιτώσουμε τους παραπάνω υπολογισμούς, συγκρίνοντας μόνο σημεία επαφής πάνω στο σύνορο της εστίας, τα οποία έχουν « εύκολη » αναπαράσταση, ως ρίζες της απαλοίφουσας του συστήματος (3.4).

**Λήμμα 3.6.7** *Η ύπαρξη διένεξης μπορεί να προσδιοριστεί εξετάζοντας τη διάταξη των σημείων επαφής των κύκλων Voronoi  $V_{trs}$ ,  $V_{trh}$  και  $V_{thr}$  πάνω στην  $C_t$ .*

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό 1.1.7 της περιοχής σκίασης προκύπτει ότι η εστία  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον κύκλο Voronoi  $V_{trs}$  αν και μόνο αν το κέντρο του  $V_{trs}$  (έστω  $q$ ) ανήκει στην περιοχή σκίασης της  $C_h$  ως προς τη διχοτόμο των  $C_t$  και  $C_r$ , δηλαδή  $q \in S_{tr}(C_h)$ . Προκύπτει επίσης (βλ. σχήμα 1.6) ότι τα άκρα του διαστήματος της περιοχής σκίασης που δεν ισούνται με 0 ή 1 αντιστοιχούν στα κέντρα των

**Πίνακας 3.1:** Υπολογισμός της περιοχής σκίασης

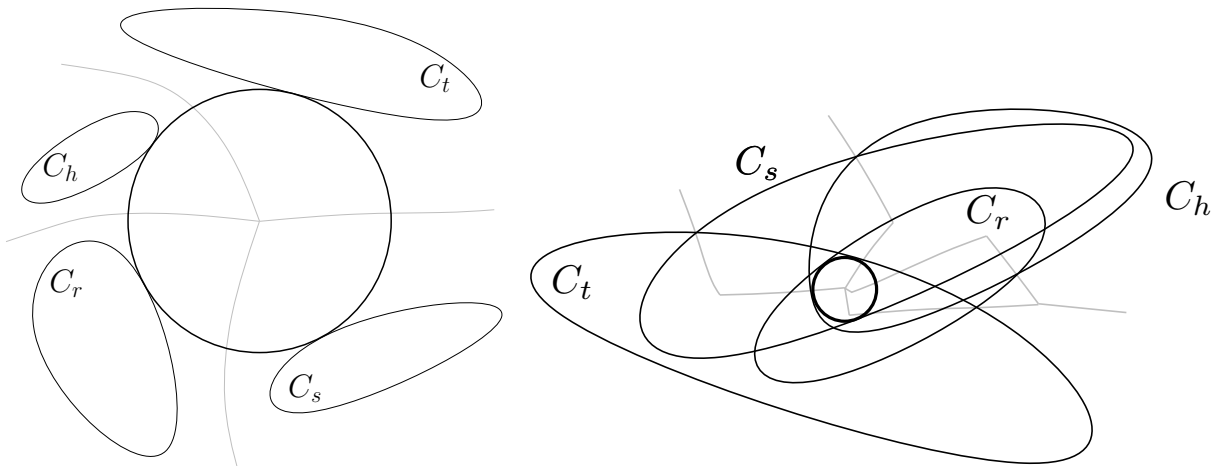
	$\exists V_{trh}$	$\exists V_{thr}$	$DFB(C_t, C_r, C_h) < 0$	$S_{tr}(C_h)$
1	FALSE	FALSE	FALSE	$\emptyset$
1	FALSE	FALSE	TRUE	$(0, 1)$
3	FALSE	TRUE	(FALSE)	$(0, a)$
4	TRUE	FALSE	(TRUE)	$(b, 1)$
5	TRUE	TRUE	FALSE	$(a, b)$
6	TRUE	TRUE	TRUE	$(0, a) \cup (b, 1)$

κύκλων  $V_{trh}$  και  $V_{thr}$ . Επομένως, για να αποφασίσουμε τη διένεξη της κορυφής  $q$ , αρκεί να υπολογίσουμε το  $S_{tr}(C_h)$  και να εξετάσουμε αν το  $q$  ανήκει σ' αυτό. Αντί να εργαζόμαστε στο  $(0, 1)$ , μπορούμε να δουλεύουμε πάνω στο σύνορο της  $C_t$ , λόγω της αντιστοιχίας των σημείων της διχοτόμου καμπύλης με τα σημεία του συνόρου της εστίας (σημεία επαφής διαφαπτόμενου κύκλου).  $\square$

Η μορφή του  $S_{tr}(C_h)$  μπορεί να προσδιοριστεί λαμβάνοντας υπόψιν την ύπαρξη ή μη των CCW και CW κύκλων  $V_{trh}$  και  $V_{thr}$  (λήμμα 3.3.1), συν τη διένεξη με τις εξωτερικές εφαπτομένες, το πρόσημο δηλαδή των  $DFB(C_t, C_r, C_h)$  και  $DFB(C_r, C_t, C_h)$ . Για παράδειγμα (βλ. σχήμα 3.24 αριστερά), αν δεν υπάρχουν οι κύκλοι Voronoi  $V_{trh}$  και  $V_{thr}$ , και  $DFB(C_t, C_r, C_h) \geq 0$  (άρα και  $DFB(C_r, C_t, C_h) \geq 0$ ), τότε  $S_{tr}(C_h) = \emptyset$ , που σημαίνει ότι η  $C_h$  δε βρίσκεται σε διένεξη με κανένα σημείο της διχοτόμου καμπύλης των  $C_t$  και  $C_r$ . Μία άλλη περίπτωση απεικονίζεται στο σχήμα 3.24 δεξιά. Έστω οι εστίες  $C_t, C_r, C_s$  που ορίζουν τον κύκλο Voronoi  $V_{trs}$ . Θεωρούμε τώρα μία νέα εστία  $C_h$  προς εισαγωγή. Βρίσκουμε ότι υπάρχει μόνο ο κύκλος  $V_{thr}$  και ότι  $DFB(C_r, C_t, C_h) < 0$  (άρα και  $DFB(C_t, C_r, C_h) \geq 0$ ), επομένως  $S_{tr}(C_h) = (0, a)$ . Αφού το κέντρο του  $V_{trs}$  βρίσκεται εντός του  $S_{tr}(C_h)$ , η  $C_h$  βρίσκεται σε διένεξη με τον  $V_{trs}$ . Ο πίνακας 3.1 συνοψίζει τον υπολογισμό της περιοχής σκίασης.

### 3.6.4 Εκφυλισμένες περιπτώσεις

Αν οι κύκλοι Voronoi  $V_{trs}$  και  $V_{trh}$  ή  $V_{thr}$  ταυτίζονται, τότε ο κύκλος Voronoi εφάπτεται και στις 4 εστίες  $C_t, C_r, C_s, C_h$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.25. Πρόκειται για μία *εκφυλισμένη περίπτωση*, διότι τα άκρα της ακμής Voronoi που ορίζουν οι τριάδες εστιών  $(C_t, C_r, C_s)$  και  $(C_t, C_r, C_h)$  ή  $(C_t, C_h, C_r)$  συμπίπτουν, με αποτέλεσμα



**Σχήμα 3.25:** Εκφυλισμένη περίπτωση για εξωτερικό (αριστερά) και για εσωτερικό (δεξιά) κύκλο Voronoi

η ακμή να εκφυλίζεται σε κορυφή.

Σε αυτή την περίπτωση οι υπολογισμοί προσήμου για τη σύγκριση ακτίνων ή σημείων επαφής θα αποτυγχάνουν για οσοδήποτε μικρά διαστήματα, αφού π.χ. η ποσότητα  $Q_{trh}$  μηδενίζεται στις ρίζες του συστήματος. Οι υπολογισμοί προσήμου αποτυγχάνουν επίσης και στις σχεδόν εκφυλισμένες περιπτώσεις, όταν η ακρίβεια της αριθμητικής δεν είναι αρκετή. Στις σχεδόν εκφυλισμένες περιπτώσεις μπορούμε να αυξήσουμε την ακρίβεια και να απαντήσουμε εν τέλει σωστά. Βέβαια, μπορεί να χρειαστεί να αυξήσουμε την ακρίβεια πολλές φορές, αφού πάντα υπάρχουν περιπτώσεις τις οποίες η τρέχουσα ακρίβεια δεν μπορεί να χειριστεί. Επίσης, όταν αυξάνουμε δυναμικά την ακρίβεια, ενδέχεται να καταλήξουμε να χειριζόμαστε αριθμούς πολύ μεγάλου δυαδικού μήκους, γεγονός το οποίο καθυστερεί σημαντικά τους υπολογισμούς. Αν δεν ενδιαφερόμαστε για ακριβή αριθμητική, μπορούμε απλά να αναφέρουμε όλες αυτές τις περιπτώσεις ως εκφυλισμένες. Όμως σε εφαρμογές όπου η ακριβής αριθμητική είναι ζωτικής σημασίας, χρειάζεται επιπλέον δουλειά.

Σε μια εκφυλισμένη περίπτωση ο αλγόριθμος (απόφασης του προσήμου) μιας παράστασης δεν τερματίζει, παρότι δύναται να κάνει υπολογισμούς με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια την οποία μεταβάλλει δυναμικά. Αυτό διότι το εύρος τιμών της παράστασης που παίρνουμε έχοντας αντικαταστήσει τις μεταβλητές με διαστήματα τιμών, περιέχει πάντα το μηδέν. Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία φραγμάτων διαχωρισμού:

**Θεώρημα 3.6.8 (Θεώρημα απόστασης ριζών [58])** Έστω  $\mathcal{P}(d, c)$  η κλάση πολυ-

νύμων βαθμού  $d$  με μέγεθος συντελεστών  $c$ . Έστω  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}(d, c)$  ένα σύνολο  $n$  πολυωνύμων  $n$  μεταβλητών το οποίο έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων όταν ομογενοποιηθεί. Αν  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ρίζα του συστήματος αυτού, τότε για κάθε  $j$  ισχύει

$$\text{είτε } \alpha_j = 0, \text{ είτε } |\alpha_j| > (3dc)^{-nd^n}.$$

Το θεώρημα χονδρικά μας λέει ότι δοθείσας μιας εισόδου με συγκεκριμένη ακρίβεια, οι εκφυλισμένες και μη εκφυλισμένες περιπτώσεις διαχωρίζονται από μία (πολύ μικρή) σταθερά. Έτσι λοιπόν ο αλγόριθμος απόφασης προσήμου τερματίζει, όταν η ακρίβεια φτάσει τη σταθερά αυτή, η οποία μάλιστα μπορεί να υπολογιστεί εξαρχής. Το πρόβλημα είναι ότι μπορεί να χρειαστούν πάρα πολλές επαναλήψεις για να επιτευχθεί η ακρίβεια που υποδεικνύει η σταθερά με αποτέλεσμα το δυαδικό μέγεθος των αριθμών να γίνει τεράστιο!

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.6.8 στην περίπτωση ελλείψεων (θεωρούμε ότι οι παράμετροι της εισόδου (ημιάξονες, στροφή, κλπ.) έχουν μέγεθος  $\tau$  δυαδικά ψηφία) για να προσδιορίσουμε τη διένεξη κορυφής. Χρησιμοποιώντας το σύστημα (3.2) επαυξημένο με τις  $B_4(t, h) = S - Q_{trh}(t, r, h) = 0$  έχουμε ( $d = 12, n = 5, c = 2^{10\tau}$ ) που δίνει  $S > (36 \cdot 2^{10\tau})^{-1244160}$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $S$  έχει ακρίβεια το πολύ  $1244160 \log_2(36 \cdot 2^{10\tau})$  ή  $7464960 + 12441600\tau$  δυαδικών ψηφίων. Αν η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι  $\phi > 1$ , τότε το πλήθος των επαναλήψεων που χρειάζονται για να αποφασίσουμε το κατηγορήμα είναι  $\log_\phi(7464960 + 12441600\tau)$ . Για συντελεστές εισόδου 10-bit ( $\tau = 10$ ), η μέθοδος γραμμικής σύγκλισης θα χρειαστεί περίπου 132.000.000 επαναλήψεις! Αντίθετα, η μέθοδος τετραγωνικής σύγκλισης απαιτεί μόλις 27 επαναλήψεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτά τα θεωρητικά φράγματα είναι αρκετά απαισιόδοξα. Ισχύουν για οποιαδήποτε συστήματα της ίδιας μορφής και δε λαμβάνουν καθόλου υπόψιν τη γεωμετρία του προβλήματος. Χρησιμοποιώντας το σύστημα με το βέλτιστο μικτό όγκο (2.13) και κάνοντας μία παρόμοια ανάλυση ( $d = 6, n = 5, c = 2^{10 \cdot 8\tau}$ ), βρίσκουμε ότι για 10-bit συντελεστές χρειαζόμαστε ακρίβεια περίπου 31.000.000 δυαδικών ψηφίων. Το σύστημα (2.11) δίνει ακόμα καλύτερο φράγμα. Για  $\tau = 10$  ( $d = 8, n = 4, c = 2^{6 \cdot 8\tau}$ ) βρίσκουμε ότι χρειαζόμαστε ακρίβεια περίπου 13.000.000 δυαδικών ψηφίων. Στους υπολογισμούς αυτούς έχουμε υποθέσει το αρκετά απαισιόδοξο άνω φράγμα (8 φορές αύξηση) στο δυαδικό μήκος συντελεστών, καθώς μετατρέπουμε τις ελλείψεις από παραμετρική σε πεπλεγμένη μορφή,

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4).

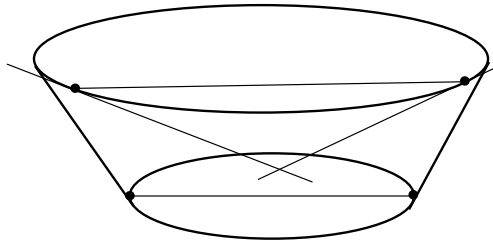
Δοθεισών των εστιών  $C_t, C_r, C_s$  και  $C_t, C_r, C_h$ , έστω  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$  οι απαλοίφουσες του (3.4) που αντιστοιχούν σε αυτές τις τριάδες εστιών (οι οποίες υπολογίζονται με τον τρόπο που περιγράφεται στην ενότητα 3.5). Έστω  $G(t) = \gcd(\Pi_1, \Pi_2)$ . Αν τα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  δεν έχουν κοινές πραγματικές ρίζες, τότε  $G(t) = 1$  (βλ. και [37]), και μπορούμε να τρέξουμε τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης με όση ακρίβεια χρειαστεί, γνωρίζοντας ότι θα τερματίσει, διότι οι ρίζες των δύο πολυωνύμων είναι διαφορετικές. Αν, αντίθετα, τα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  έχουν κοινές πραγματικές ρίζες, τότε  $G(t) \neq 1$ , και προχωράμε σε εκλέπτυνση του διαστήματος υποδιαίρεσης, ούτως ώστε είτε να περιέχει μόνο μία πραγματική ρίζα του  $G(t)$  και καμία άλλη ρίζα των  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$ , που σημαίνει ότι έχουμε εκφυλισμένη περίπτωση, είτε να μην περιέχει καμία πραγματική ρίζα του  $G(t)$ , που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης θα τερματίσει. Σε αυτή την περίπτωση μάλιστα, ναι μεν τα πολυώνυμα έχουν κοινή ρίζα, αλλά αυτή δεν είναι η ρίζα που αντιστοιχεί στον κύκλο Voronoi που ψάχνουμε.

Η χρήση του ΜΚΔ και των απαλοίφουσών μας επιτρέπει να βρούμε το *πραγματικό* φράγμα διαχωρισμού το οποίο στην πράξη είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το θεωρητικό που αναφέραμε παραπάνω. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε πράξεις με αριθμούς μεγάλου δυαδικού μήκους (σημειώστε ωστόσο ότι η ίδια η απαλοίφουσα μπορεί να έχει αρκετά μεγάλους συντελεστές). Στην πράξη τρέχουμε τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης με μια προκαθορισμένη ακρίβεια ώστε να απαντάμε γρήγορα στις εύκολες (μη εκφυλισμένες) περιπτώσεις. Αν δεν πάρουμε απάντηση, τότε χρησιμοποιούμε την αλγεβρική προσέγγιση με τις απαλοίφουσες.

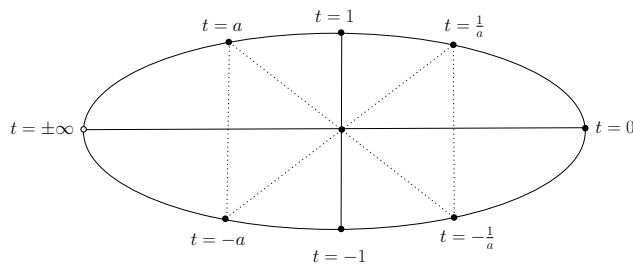
### 3.7 Όταν η παράμετρος τείνει στο άπειρο

Όπως είδαμε στο κεφ. 1, υπάρχει ένα σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο  $t$ , όταν  $t \rightarrow \pm\infty$  το οποίο στις ελλείψεις είναι το ένα άκρο του μεγάλου άξονα (βλ. ενότητα 2.1.1). Στην περίπτωση δύο ελλείψεων (λόγω συμμετρίας) δεν μπορούν να βρίσκονται τα άκρα του μεγάλου άξονα και των δύο στο  $\text{ΚΠ}^\circ$ , δηλαδή στο εσωτερικό του  $\text{ΚΠ}$ .

**Λήμμα 3.7.1** Δοθεισών δύο ελλείψεων (σχήμα 3.26), τα άκρα του μεγάλου άξονα δεν περιέχονται όλα στο  $\text{ΚΠ}^\circ$ .



**Σχήμα 3.26:** Το εσωτερικό του ΚΠ δύο ελλείψεων δεν μπορεί να περιέχει όλα τα άκρα των μεγάλων αξόνων



**Σχήμα 3.27:** Η παραμετροποίηση της έλλειψης εμπεριέχει τη συμμετρία

**Απόδειξη.** Υποθέστε ότι και τα δύο άκρα του μεγάλου άξονα της μίας έλλειψης βρίσκονται εντός του ΚΠ<sup>ο</sup> (η κάτω έλλειψη του σχήματος 3.26). Τότε, αν τα άκρα και της άλλης έλλειψης βρίσκονται εντός του ΚΠ<sup>ο</sup>, οι εφαπτομένες σε εκείνα τα σημεία θα τέμνονται, που είναι άτοπο διότι οι εφαπτομένες στα άκρα είναι παράλληλες. □

Συνέπεια του παραπάνω λήμματος είναι ότι για ένα ζεύγος ελλείψεων των οποίων το ΚΠ<sup>ο</sup> περιέχει κάποιο  $\infty$ -point, κάποια από τις δίδυμες (συμμετρικές) ελλείψεις θα έχει συνεχές διάστημα (τόξο) στο ΚΠ<sup>ο</sup>. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν εξίσωση καμπύλης τη συμμετρική της.

Επίσης, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα συμμετρικά σημεία πιο άμεσα: Εκτελούμε κανονικά τους υπολογισμούς μας για τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης και δουλεύουμε και με διαστήματα (τόξα) που περιέχουν και το άπειρο. Αν χρειαστεί να υποδιαιρέσουμε ένα τέτοιο διάστημα, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό με τα συμμετρικά άκρα (ενώνοντάς τα με το κέντρο και προεκτείνοντας), να πάρουμε το μέσον του και κατόπιν το συμμετρικό του. Το σχήμα 3.27 απεικονίζει μερικά σημεία μιας έλλειψης και τα συμμετρικά τους ως προς το κέντρο και τους άξονες. Στην υλοποίησή μας συμβολίζουμε ένα τόξο με θετική φορά από το σημείο  $t = a$  στο  $t = b$  με ένα ζεύγος  $[a, b]$ . Όταν  $a \leq b$ , τότε το τόξο δεν περιέχει το  $\infty$ -point, ενώ όταν  $a > b$ , τότε το τόξο περιέχει το  $\infty$ -point. Αυτή η αναπαράσταση έχει την ιδιότητα της διατή-

ρησης της θετικής φοράς. Ξεκινώντας από την τιμή  $a$ , αυξάνοντας το  $a$  κινούμαστε δεξιόστροφα μέχρι να φτάσουμε την τιμή  $b$ . Αν  $a > b$ , τότε όταν φτάσουμε στο  $+\infty$  μεταπηδάμε στο  $-\infty$  (διότι ταυτίζονται) και εν τέλει κάποτε θα φτάσουμε την τιμή  $b$ .

Τέλος, στην υλοποίηση χρειάζεται επιπλέον προσοχή όταν κάποιο  $\infty$ -point είναι σημείο επαφής Απολλώνιου κύκλου ή κάποιας άλλης βοηθητικής κατασκευής, όπως η κοινή εφαπτομένη. Σε αυτή την (εκφυλισμένη) περίπτωση το πολυώνυμο που εκφράζει εκείνο το σημείο επαφής έχει μία ρίζα στο άπειρο. Αυτό μεταφράζεται ως μηδενισμός του μεγιστοβάθμιου συντελεστή, που σημαίνει ότι ο βαθμός του πολυώνυμου τελικά πέφτει κατά ένα (δείτε π.χ. την [59]). Για παράδειγμα, το πολυώνυμο  $\Lambda_{tr}(t)$  της ενότητας 2.5 που εκφράζει τα σημεία επαφής των κοινών εφαπτομένων, στην περίπτωση ελλείψεων έχει πλέον βαθμό 3, αντί 4.

### 3.8 Διένεξη ακμής

Το κατηγορημα `EDGECONFLICTTYPE` προσδιορίζει τον τύπο διένεξης πάνω σε μία ακμή του διαγράμματος Voronoi (βλ. σχήμα 1.8). Έστω οι εστίες  $C_t$ ,  $C_r$ ,  $C_s$ ,  $C_h$  που ορίζουν μία ακμή Voronoi  $e$  πάνω στη διχοτόμο καμπύλη των  $C_t$  και  $C_r$  με άκρα τα κέντρα των κύκλων Voronoi  $V_{tsr}$  και  $V_{trh}$ . Έστω  $[a, b] \subset (0, 1)$  το διάστημα που αντιστοιχεί στην  $e$ . Θεωρούμε τώρα μία νέα εστία  $C_q$  προς εισαγωγή. Όπως είδαμε στην ενότητα 1.1, αρκεί να υπολογίσουμε τη μορφή του  $[a, b] \cap S_{tr}(C_q)$ . Αρχικά υπολογίζουμε το  $S_{tr}(C_q)$  (βλ. ενότητα 3.6.3) και στη συνέχεια εξετάζουμε αν  $a \in S_{tr}(C_q)$  και  $b \in S_{tr}(C_q)$  λαμβάνοντας υπόψιν και τη σχετική θέση των  $a, b$  ως προς τα άκρα του  $S_{tr}(C_q)$ . Ο πίνακας 3.2 συνοψίζει τις 20 δυνατές περιπτώσεις. Προσέξτε ότι ο έλεγχος  $a \in S_{tr}(C_q)$  (αντίστοιχα για το  $b$ ) ισοδυναμεί με το κατηγορημα `INCIRCLE` για την εστία  $C_h$  και τον κύκλο Voronoi  $V_{tsr}$  (αντίστοιχα για τον  $V_{trh}$ ). Ο πίνακας 3.2 μπορεί να συμπυκνωθεί στον 3.3, με κλήσεις του `INCIRCLE` (και κατά συνέπεια και του `DISTANCEFROMBITANGENT`) και λαμβάνοντας υπόψιν χωριστά τις περιπτώσεις 13 και 19 (τις οποίες συμβολίζουμε με  $S^{13}$  και  $S^{19}$  αντίστοιχα) του πίνακα 3.2.

Στην [24], σχετικά με τον υπολογισμό του `EDGECONFLICTTYPE`, αναφέρεται και το υποκατηγορημα `ORDERONBISECTOR`, το οποίο προσδιορίζει τη διάταξη των κέντρων διεφαπτόμενων δίσκων δύο εστιών πάνω στη διχοτόμο καμπύλη τους. Η παραμετρική αναπαράσταση επιτρέπει εύκολη αναπαράσταση των κέντρων των δίσκων μέσω των σημείων επαφής, καθώς τα σημεία της διχοτόμου αντιστοιχούν σε σημεία πάνω



**Πίνακας 3.2:** Υπολογισμός του EDGECONFLICTTYPE μέσω της περιοχής σκίασης

	$S_{tr}(C_q)$	$a \in S_{tr}(C_q)$	$b \in S_{tr}(C_q)$	EDGECONFLICTTYPE
1	$\emptyset$	(FALSE)	(FALSE)	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
2	$(0, 1)$	(TRUE)	(TRUE)	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
3	$(0, a')$	FALSE ( $a \geq a'$ )	(FALSE)	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
4		TRUE ( $a < a'$ )	FALSE ( $b \geq a'$ )	ΚΟΡΥΦΗ- <i>tsr</i>
5			TRUE ( $b < a'$ )	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
6	$(b', 1)$	FALSE ( $a \leq b'$ )	FALSE ( $b \leq b'$ )	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
7			TRUE ( $b > b'$ )	ΚΟΡΥΦΗ- <i>trh</i>
8		TRUE ( $a > b'$ )	(TRUE)	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
9	$(a', b')$	TRUE ( $a' < a < b'$ )	FALSE ( $b \geq b'$ )	ΚΟΡΥΦΗ- <i>tsr</i>
10			TRUE ( $b < b'$ )	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
11		FALSE ( $a \leq a'$ )	TRUE ( $a' < b < b'$ )	ΚΟΡΥΦΗ- <i>trh</i>
12			FALSE ( $b \leq a'$ )	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
13			FALSE ( $b \geq b'$ )	ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ
14		FALSE ( $a \geq b'$ )	(FALSE)	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
15		$(0, a') \cup (b', 1)$	FALSE ( $a' \leq a \leq b'$ )	FALSE ( $b \leq b'$ )
16	TRUE ( $b > b'$ )			ΚΟΡΥΦΗ- <i>trh</i>
17	TRUE ( $a < a'$ )		FALSE ( $a' \leq b \leq b'$ )	ΚΟΡΥΦΗ- <i>tsr</i>
18			TRUE ( $b < a'$ )	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
19			TRUE ( $b > b'$ )	ΔΥΟΚΟΡΥΦΕΣ
20	TRUE ( $a > b'$ )		(TRUE)	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ

**Πίνακας 3.3:** Υπολογισμός του EDGECONFLICTTYPE μέσω του INCIRCLE

	$a \in S_{tr}(C_q)$	$b \in S_{tr}(C_q)$		EDGECONFLICTTYPE
1	FALSE	FALSE	$\neg S^{13}$	ΜΗΔΙΕΝΕΞΗ
2	FALSE	FALSE	$S^{13}$	ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ
3	TRUE	FALSE		ΚΟΡΥΦΗ- <i>tsr</i>
4	FALSE	TRUE		ΚΟΡΥΦΗ- <i>trh</i>
5	TRUE	TRUE	$\neg S^{19}$	ΟΛΟΚΛΗΡΗΑΚΜΗ
6	TRUE	TRUE	$S^{19}$	ΔΥΟΚΟΡΥΦΕΣ

στο σύνορο των εστιών. Εμείς χρησιμοποιούμε εμμέσως το ORDERONBISECTOR, όταν συγκρίνουμε τη θέση των σημείων επαφής πάνω σύνορο των εστιών.

## Κεφάλαιο 4

# Υλοποίηση και πειραματικά αποτελέσματα

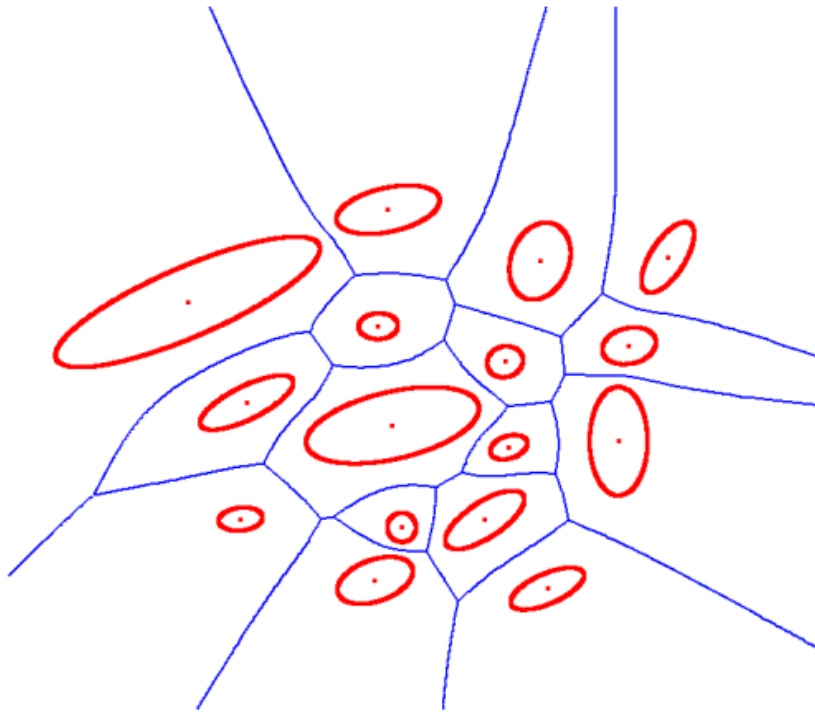
Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε την υλοποίησή μας κατά το *παράδειγμα ακριβούς αριθμητικής* η οποία αφορά μη τεμνόμενες ελλείψεις στο επίπεδο (σχήμα 4.1), και η οποία αυτή τη στιγμή επεκτείνεται, ώστε να καλύπτει και την περίπτωση ψευδοκύκλων. Ο κώδικάς μας<sup>1</sup> βασίζεται στο ήδη υπάρχον πακέτο της CGAL για το Απολλώνιο διάγραμμα, σε ότι αφορά το συνδυαστικό κομμάτι του αλγορίθμου. Επειδή η CGAL ακολουθεί το παράδειγμα γενικού προγραμματισμού, το βασικό πρόβλημα ήταν η υλοποίηση των κατηγορημάτων στην περίπτωση ελλείψεων, γενικεύοντας έτσι τις προϋπάρχουσες κυκλικές εστίες του Απολλώνιου διαγράμματος.

Για τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις, βασιστήκαμε στη βιβλιοθήκη SYNAPS [35]. Πρόκειται για μια βιβλιοθήκη αλγεβρικών αλγορίθμων η οποία παρέχει (ανάμεσα στα άλλα) μία πολύ αποτελεσματική υλοποίηση για επίλυση πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η οποία χρησιμοποιεί *Συνεχή Κλάσματα* [60] και την οποία χρησιμοποιούμε για την επίλυση των πολυωνύμων βαθμού 184.

Χρειάστηκε επίσης να υλοποιήσουμε πολυωνυμική παρεμβολή για τον υπολογισμό της απαλοίφουσας του συστήματος (3.4). Για ακόμα μεγαλύτερη ταχύτητα, χρησιμοποιήσαμε τη βιβλιοθήκη NTL [61]. Αυτή είναι μια βιβλιοθήκη ανοιχτού κώδικα σε C++, η οποία παρέχει ασυμπτωτικά γρήγορους αλγορίθμους για πολυωνυμικό ΜΚΔ και απαλοίφουσες τύπου Sylvester. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.5.3 για την απαλοιφή των πλεοναζόντων παραγόντων σε κάθε βήμα της παρεμβολής και παίρνουμε το πολυώνυμο βέλτιστου βαθμού στη φάση ανακατασκευής με το βέλτιστο

---

<sup>1</sup><http://www.di.uoa.gr/~geotz/vorell/>



**Σχήμα 4.1:** Διάγραμμα Voronoi 16 ελλείψεων

αριθμό των 185 επαναλήψεων.<sup>2</sup>

Για το INCIRCLE, έχουμε επίσης υλοποιήσει τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης τετραγωνικής σύγκλισης που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.4. Η υλοποίηση χρησιμοποιεί αριθμητική διαστημάτων που παρέχεται από τη SYNAPS, καθώς και αριθμητική κινητής υποδιαστολής πολλαπλής ακρίβειας από τη βιβλιοθήκη MPFR [62]. Με αυτόν τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης στην ουσία έχουμε ένα φίλτρο, το οποίο στις μη εκφυλισμένες περιπτώσεις μπορεί και απαντά το INCIRCLE πριν εξαντληθεί η διαθέσιμη ακρίβεια. Έτσι, κερδίζουμε πολύ σε ταχύτητα, ειδικά κατά τον υπολογισμό του εξωτερικού τριεφαπτόμενου κύκλου. Ωστόσο, η σύγκλιση για αυθαίρετες ομαλές τεμνόμενες εστίες ίσως να μην είναι πάντα τετραγωνική (δεν μπορεί να την εγγυηθεί η απόδειξη που δώσαμε, όπου το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων προϋποθέτει το μη μηδενισμό της μερικής παραγώγου, αν και δεν έχουμε βρει κάποιο παράδειγμα που να μην παρουσιάζει τετραγωνική σύγκλιση). Στις περιπτώσεις που η ακρίβεια της MPFR δεν επαρκεί, καταφεύγουμε στην (πιο αργή) αλγεβρική μέθοδο επίλυσης. Στην καρδιά του αλγορίθμου υποδιαίρεσης έχουμε υλοποιήσει μία μέθοδο επίλυσης Newton για αριθμητική διαστημάτων, η οποία μάλιστα ενσωματώθηκε στη βιβλιο-

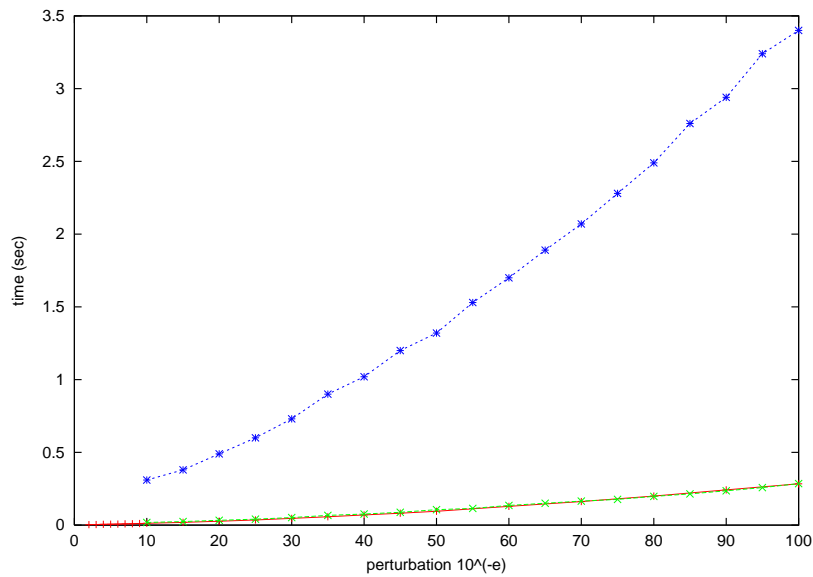
<sup>2</sup>Για να προσδιορίσουμε ένα πολυώνυμο βαθμού  $d$ , απαιτούνται αποτιμήσεις σε  $d + 1$  σημεία.

θήκη SYNAPS. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χειριστεί πολυώνυμα με συντελεστές που είναι διαστήματα και μας επιτρέπει να λύνουμε γρήγορα εξισώσεις πολλών μεταβλητών προσεγγίζοντας καθεμία από τις μεταβλητές με ένα διάστημα.

Ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης μπορεί να προσεγγίσει τα σημεία επαφής του κύκλου Voronoi με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια. Η χρήση της απαλοίφουσας μας επιτρέπει να γνωρίζουμε αν υπάρχει εκφυλισμένος κύκλος Voronoi που να εφάπτεται σε 4 εστίες. Αυτό είναι δυνατό, διότι μας παρέχει το πραγματικό φράγμα διαχωρισμού όπως είδαμε (ενότητα 3.6.4). Αυτό ισχύει για όλους τους υπολογισμούς υπό την έννοια ότι εκτελούμε τις « δύσκολες » αλγεβρικές πράξεις χρησιμοποιώντας αριθμητική διαστημάτων. Οι εκφυλισμένες περιπτώσεις στο λογισμό με αριθμητική διαστημάτων οδηγούν σε αβέβαιους υπολογισμούς προσήμων, δηλαδή σε διαστήματα που περιέχουν το 0. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η απαλοίφουσα μας παρέχει την απαραίτητη πληροφορία, ώστε να αποφασίσουμε το αποτέλεσμα, αυξάνοντας την ακρίβεια κατά ένα σταθερό αριθμό ψηφίων, που είναι όμως πολύ λιγότερα από το θεωρητικό φράγμα διαχωρισμού ριζών.

Τέλος, υλοποιήσαμε μία ρουτίνα οπτικοποίησης της διχοτόμου καμπύλης δύο ελλείψεων. Επειδή η πεπλεγμένη μορφή της καμπύλης αυτής έχει βαθμό 28 στον καρτεσιανό χώρο, « ιχνηλατούμε » την ισοδύναμη πεπλεγμένη μορφή στον παραμετρικό χώρο η οποία έχει βαθμό 12. Η ρουτίνα αυτή πάντως επιδέχεται και περαιτέρω βελτιώσεις.

Συνολικά, η υλοποίησή μας διαχωρίζει την άλγεβρα από τη γεωμετρία. Αυτό είναι σημαντικό όταν συνδέει κανείς μεταξύ τους διαφορετικές ή εναλλακτικές αλγεβρικές βιβλιοθήκες. Ο κώδικάς μας μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε αλγεβρική βιβλιοθήκη, εφόσον οι τελευταίες πληρούν κάποιες συγκεκριμένες απαιτήσεις διεπαφής. Στην τελευταία μας έκδοση (η οποία είναι διαθέσιμη στον svn server της CGAL) ξεκίνησε η υποστήριξη ψευδοκύκλων, και χρησιμοποιείται ο (μελλοντικός) Αλγεβρικός Πυρήνας της CGAL, ο οποίος παρέχει επίλυση πολυωνύμων μίας μεταβλητής, χειρισμό πολυωνύμων πολλών μεταβλητών και υπολογισμό απαλοίφουσας με παρεμβολή.

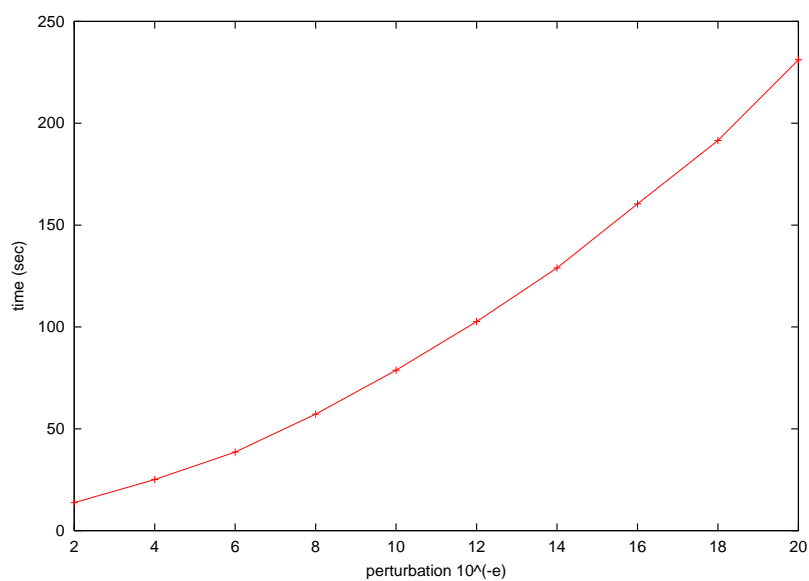


**Σχήμα 4.2:** Χρόνος εκτέλεσης για τα κατηγορήματα SIDEOfBISECTOR (+), DISTANCEFROMBITANGENT (x) και INCIRCLE (\*), καθώς το δυαδικό μήκος εισόδου αυξάνεται

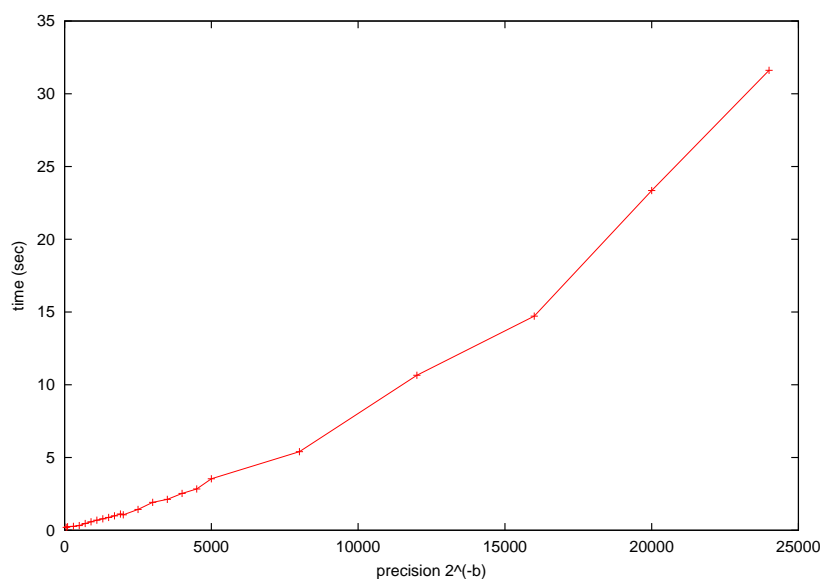
## 4.1 Επιδόσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε πειραματικά αποτελέσματα. Όλοι οι χρόνοι έχουν μετρηθεί σε Pentium-4 2.6 GHz με 1.5GB RAM, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

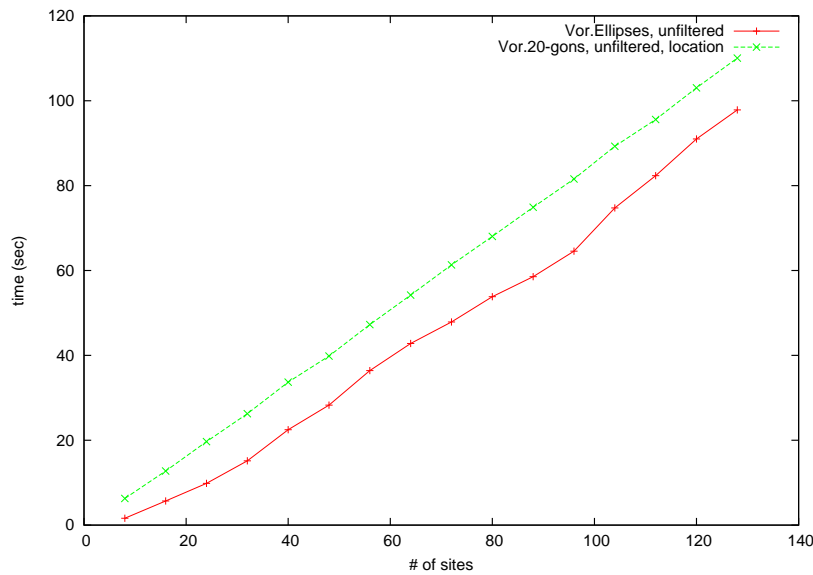
Μετρήσαμε την απόδοση των SIDEOfBISECTOR, DISTANCEFROMBITANGENT και INCIRCLE με μεταβλητό δυαδικό μήκος εισόδου. Το σχήμα 4.2 αντιστοιχεί σε ελλείψεις των οποίων οι παράμετροι (άξονες, στροφή, κέντρο) έχουν υποστεί τυχαία διαταραχή προσθέτοντας ή αφαιρώντας το  $10^{-e}$  (μεταβάλλοντας το  $e$ ) σε μικρούς αριθμούς (10-bit). Αυτό εξαναγκάζει τα πολυώνυμα που υπολογίζονται σε κάθε κατηγορημα να έχουν μεγάλους συντελεστές, αφού οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται από τις αρχικές παραμέτρους των ελλείψεων. Όλοι οι χρόνοι φαίνεται ότι αυξάνουν υποετραγωνικά ως προς  $e$ , το οποίο είναι αναμενόμενο, διότι τα SIDEOfBISECTOR, DISTANCEFROMBITANGENT έχουν σταθερή αριθμητική πολυπλοκότητα και το INCIRCLE υπολογίζεται με τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης τετραγωνικής σύγκλισης επομένως υπολογίζεται  $\tau$  ψηφία σε  $\mathcal{O}(\log(\tau))$  βήματα. Στις εκφυλισμένες περιπτώσεις, στο χρόνο του INCIRCLE υπερσχύει ο χρόνος υπολογισμού της απαλοιφουσας, που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3. Η υποετραγωνική συμπεριφορά των δύο πρώτων κατηγορημάτων συμφωνεί με τη θεωρητική πολυπλοκότητα που δόθηκε στις ενότητες 2.4 και 2.5.



**Σχήμα 4.3:** Χρόνος εκτέλεσης για τον υπολογισμό της απαλοιφουσας, καθώς το δυαδικό μήκος εισόδου αυξάνεται



**Σχήμα 4.4:** Χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου υποδιαίρεσης, καθώς η ζητούμενη ακρίβεια αυξάνεται

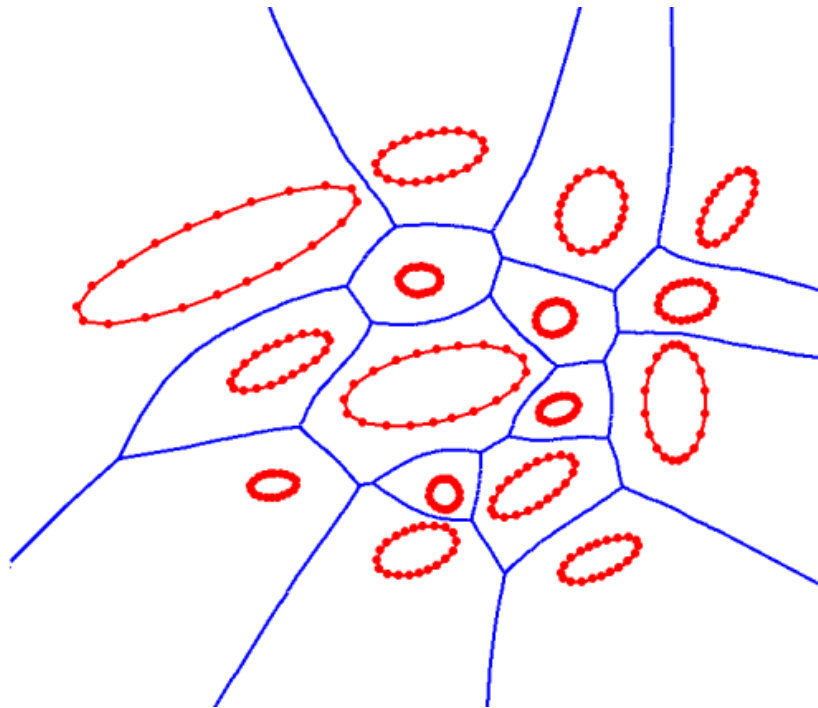


**Σχήμα 4.5:** Γράφος Delaunay πολυγώνων και ελλείψεων

Τέλος, μετρήσαμε το χρόνο που χρειάζεται ο αλγόριθμος υποδιαίρεσης για να επιτύχει ακρίβεια  $2^{-b}$ , χρησιμοποιώντας αριθμούς κινητής υποδιαστολής MPFR (βλ. σχήμα 4.4). Στην έκδοση πολλαπλής ακρίβειας λείπουν ορισμένες βελτιώσεις με αποτέλεσμα να είναι 2 φορές πιο αργή από την έκδοση σε ALIAS [63], η οποία χρησιμοποιεί την καθιερωμένη αριθμητική κινητής υποδιαστολής των 53 bit. Η ακρίβεια των 53 bit επιτυγχάνεται σε περίπου 0.2 sec και 1 sec επαρκεί για περίπου 2000 bit ακρίβειας, ενώ η προσέγγιση των 24k bit παίρνει περίπου 0.5 min. Αυτό δείχνει ότι το θεωρητικό φράγμα διαχωρισμού των μερικών εκατομμυρίων ψηφίων δεν μπορεί να επιτευχθεί αποτελεσματικά και έτσι αναδεικνύεται η χρησιμότητα των μεθόδων που κάνουν χρήση της απαλοίφουσας. Από την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός της απαλοίφουσας, ακόμη και με μικρούς 10 bit συντελεστές εισόδου, μπορεί να είναι μέχρι και 70 φορές πιο αργός από τον αλγόριθμο υποδιαίρεσης στην περίπτωση που ο τελευταίος χρησιμοποιεί αριθμητική ακρίβειας  $2^{-53}$ . Γι' αυτό μία αποτελεσματική υλοποίηση θα πρέπει να συνδυάζει και τις δύο μεθόδους.

Ο συνολικός χρόνος για την κατασκευή του γράφου Delaunay φαίνεται στο σχήμα 4.5 (συμπαγής γραμμή). Χρειάζονται, για παράδειγμα, 98 sec για τον υπολογισμό του ακριβούς γράφου Delaunay 128 μη τεμνόμενων ελλείψεων. Αυτό που είναι ίσως περισσότερο ενδιαφέρον, είναι ότι μέχρι αυτό το πλήθος εστιών, ο χρόνος κατασκευής είναι σχεδόν γραμμικός.





**Σχήμα 4.6:** Διάγραμμα Voronoi 16 20-γώνων που προσεγγίζουν κάθε έλλειψη (320 ευθ. τμήματα συνολικά)

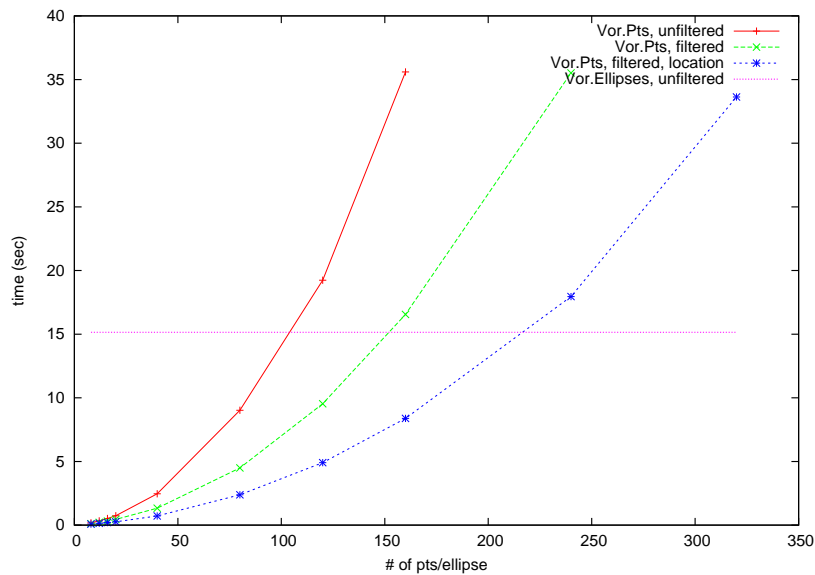
## 4.2 Σύγκριση με διάγραμμα Voronoi σημείων

Ένας εναλλακτικός τρόπος να λύσουμε προβλήματα που περιλαμβάνουν καμπύλα αντικείμενα είναι να προσεγγίσουμε τα τελευταία με απλούστερα αντικείμενα (εστίες στην περίπτωση μας), όπως πολύγωνα ή ακόμα και σύνολα σημείων. Ωστόσο, μία καλή προσέγγιση ενδέχεται να απαιτήσει μεγάλο αριθμό εστίων.

Κάθε έλλειψη προσεγγίζεται από ένα σταθερό αριθμό  $k$  σημείων τα οποία λαμβάνονται ομοιόμορφα στο σύνορό της (όπως οι κορυφές των πολυγώνων στο σχήμα 4.6). Αυτά τα σημεία έχουν ρητές συντεταγμένες, καθώς προκύπτουν από την (2.1).

Χρησιμοποιώντας GNU αριθμητική ρητών (Gmpq στη CGAL), συγκρίνουμε την υλοποίησή μας έναντι 3 παραλλαγών του αυξητικού αλγορίθμου της CGAL για την τριγωνοποίηση Delaunay σημείων: (i) χωρίς φιλτράρισμα,<sup>3</sup> (ii) με φιλτράρισμα, (iii) με φιλτράρισμα και βελτιωμένο εντοπισμό εγγύτερου γείτονα. Τα σημεία εισάγο-

<sup>3</sup>Το φιλτράρισμα είναι μία τεχνική όπου τα κατηγορήματα απαντώνται χρησιμοποιώντας αριθμητική διπλής ακρίβειας, καταφεύγοντας στην πιο αργή ακριβή αριθμητική μόνο όταν το φίλτρο αδυνατεί να δώσει απάντηση. Αυτό υπονοεί την ύπαρξη κάποιου μηχανισμού που εξακριβώνει αν το αποτέλεσμα του φίλτρου είναι σωστό ή όχι.

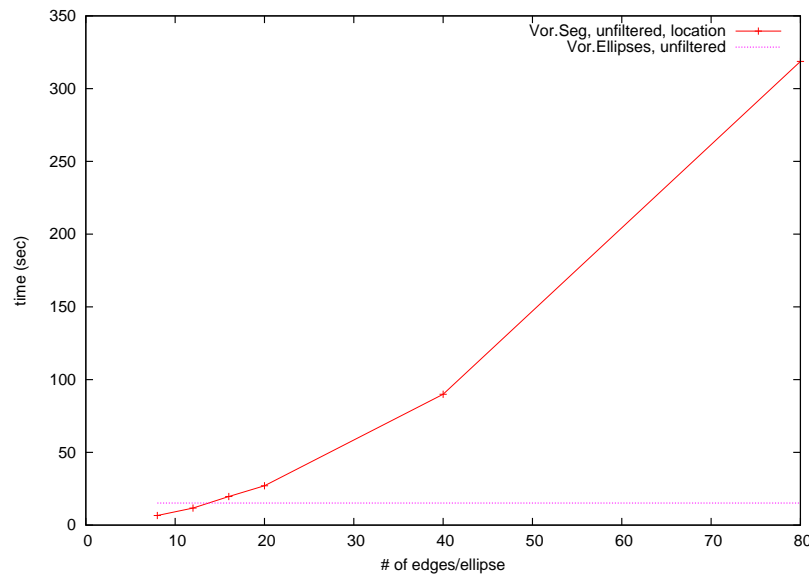


**Σχήμα 4.7:** Γράφος Delaunay 32 ελλείψεων εναντίον σημειακών προσεγγίσεων με αυξανόμενο αριθμό σημείων ανά έλλειψη

νται κατά τη θετική φορά για κάθε έλλειψη, επομένως, η έδρα Delaunay του πιο πρόσφατα εισαχθέντος σημείου παρέχεται ως υπόδειξη στη ρουτίνα εισαγωγής.

Η δική μας υλοποίηση για ελλείψεις χρησιμοποιεί Gmpq χωρίς φιλτράρισμα, εκτός από το INCIRCLE που χρησιμοποιεί τη μέθοδο υποδιαίρεσης. Ωστόσο η τελευταία χρησιμοποιεί επίσης ορισμένους υπολογισμούς ακριβούς αριθμητικής οι οποίοι θα μπορούσαν να επιταχυνθούν.

Το σχήμα 4.7 παρουσιάζει αποτελέσματα για 32 ελλείψεις με  $k$  που κυμαίνεται από 8 μέχρι 320. Βλέπουμε ότι ο υπολογισμός του γράφου Delaunay 32 ελλείψεων είναι γρηγορότερος από τις παραλλαγές (i),(ii),(iii) της τριγωνοποίησης Delaunay σημείων για  $k \geq 120$ ,  $k \geq 160$  και  $k \geq 240$  αντίστοιχα. Οι τριγωνοποιήσεις αυτές έχουν αντίστοιχα 3840, 5120 και 7680 κορυφές. Υπάρχουν και ακμές Delaunay που αντιστοιχούν σε ζεύγη σημείων που βρίσκονται και τα δύο στην ίδια έλλειψη (με δυϊκές ακμές Νοροποι στο εσωτερικό της έλλειψης). Αυτά πρέπει να απορριφθούν, κάτι το οποίο εισάγει ένα επιπλέον κόστος που δεν έχουμε λάβει υπόψιν. Αυτό μάλλον ισχύει για όλες τις ακμές Delaunay εκτός από μία, ανάμεσα σε γειτονικές ελλείψεις.



**Σχήμα 4.8:** Γράφος Delaunay 32 πολυγώνων με αυξανόμενο αριθμό ακμών

### 4.3 Σύγκριση με διάγραμμα Voronoi πολυγώνων

Συγκρίνουμε με το πακέτο της CGAL για γράφο Delaunay ευθυγράμμων τμημάτων [4], όπου αντικαταστήσαμε κάθε έλλειψη με ένα 20-γωνα (σχήμα 4.6). Το σχήμα 4.5 δείχνει το χρόνο που χρειάζεται η CGAL για την αυξητική κατασκευή του γράφου Delaunay πολυγώνων CGAL (διακεκομμένη γραμμή) αντιπαραθέτοντας το χρόνο για την περίπτωση ελλείψεων (συμπαγής γραμμή) όταν ο αριθμός εστιών κυμαίνεται από 4 έως 128. Το κόστος μιας εισαγωγής είναι χονδρικά  $O(\log^2 k)$  [4, 28], όπου  $k$  το πλήθος των ήδη εισαχθέντων εστιών. Ο υπολογισμός του πλησιέστερου γείτονα γίνεται και εδώ με έξυπνο τρόπο. Συγκεκριμένα, αφού κάθε τμήμα εισάγεται κατά τη θετική φορά γύρω από μία έλλειψη, ένας πιθανός κοντινότερος γείτονας είναι το πιο πρόσφατα εισαχθέν τμήμα, το οποίο και εδώ παρέχεται ως υπόδειξη στη ρουτίνα εισαγωγής. Η υλοποίηση γράφου Delaunay τμημάτων που μετρήθηκε χρησιμοποιεί αριθμητική Gmpq, χωρίς φιλτράρισμα. Δε λάβαμε υπόψιν το χρόνο για την αφαίρεση των τεχνητών ακμών. Αυτό που παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον είναι ότι ο υπολογισμός του γράφου Delaunay πολυγώνων είναι πιο αργός από την περίπτωση ελλείψεων, όταν έχουμε περισσότερες από 15 ακμές ανά έλλειψη.

Το σχήμα 4.8 δείχνει το χρόνο που απαιτείται για την κατασκευή του γράφου Delaunay graph 32 ελλείψεων (διακεκομμένη γραμμή) και 32 πολυγώνων που προσεγγίζουν κάθε έλλειψη για μεταβλητό αριθμό ακμών (συμπαγής γραμμή). Καθώς

αυξάνει ο αριθμός ακμών ανά έλλειψη, το τετραγωνικό-λογαριθμικό κόστος ανά εισαγωγή γίνεται μη αμελητέο. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο γράφος Delaunay πολυγώνων υπολογίζεται γρηγορότερα μόνο για προσεγγίσεις με λιγότερες από 16 ακμές ανά έλλειψη.

## 4.4 Περιορισμός σε κύκλους

Στην ενότητα αυτή συγκρίνουμε την υλοποίησή μας στην περίπτωση κύκλων με την ήδη υπάρχουσα υλοποίηση της CGAL για το Απολλώνιο διάγραμμα. Τα πειράματα έγιναν σε έναν Core2 Duo 1.83 GHz με 1GB RAM. Τα δεδομένα εισόδου περιλαμβάνουν: (i) εκφυλισμένες περιπτώσεις: τρεις κύκλοι με έναν κινούμενο τέταρτο κύκλο, (ii) σχεδόν εκφυλισμένες περιπτώσεις: όπως στην (i), όπου η είσοδος έχει υποστεί τυχαία διαταραχή κατά  $\pm 10^{-e}$ ,  $e \in \{2, 4, 6\}$ , (iii) τυχαία είσοδος: κέντρα ομοιόμορφα κατανομημένα μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα.

Ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνει σχεδόν γραμμικά με το δυαδικό μήκος εισόδου για όλα τα κατηγορήματα. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές στην περίπτωση (ii), διότι και οι δύο υλοποιήσεις βασίζονται σε αλγορίθμους σταθερής αριθμητικής πολυπλοκότητας, οι οποίοι δεν εξαρτώνται από το πόσο κοντά σε εκφυλισμένη περίπτωση βρίσκεται η κάθε είσοδος. Και οι δύο υλοποιήσεις συμπεριφέρονται σχεδόν το ίδιο στις περιπτώσεις (i) και (ii)  $e = 2$ , αφού το δυαδικό μήκος είναι το ίδιο και καμία δεν εξαρτάται από το φράγμα διαχωρισμού.

Φαίνεται ότι η υλοποίησή μας είναι μέχρι 2 τάξεις μεγέθους πιο αργή από την ειδική υλοποίηση για κύκλους. Η διαφορά αυτή είναι αναμενόμενη, διότι η περίπτωση των κύκλων ανάγεται σε υπολογισμούς με αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 2. Η καλύτερη σχετική απόδοση επιτυγχάνεται στο DISTANCEFROMBITANGENT, διότι και οι δύο υλοποιήσεις βασίζονται σε αλγορίθμους της ίδιας αλγεβρικής πολυπλοκότητας. Αντίθετα, η χειρότερη απόδοση επιτυγχάνεται για το INCIRCLE, διότι η περίπτωση των κύκλων έχει βελτιστοποιηθεί.

## 4.5 Πειράματα με γενικές παραμετρικές καμπύλες

Παρότι η υλοποίησή μας σε C++ καλύπτει προς το παρόν μόνο ελλείψεις, εφαρμόσαμε την προτεινόμενη μέθοδο για τον υπολογισμό της απαλοίφουσας σε διάφορους

**Πίνακας 4.1:** Βαθμός απαλοίφουσας για διάφορες καμπύλες

<b>Καμπύλη</b>	$d$	<b>χρόνος</b>	<b>απαλοίφουσα</b>	<b>φράγμα</b>
« Φασόλι »	4	530.00	2632	6120
Κωνικές τομές	2	7.90	184	512
B-splines	3	9.20	404	2275
B-splines	2	0.65	93	512

τύπους καμπυλών χρησιμοποιώντας το MAPLE. Μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 4.1. Η πρώτη στήλη δείχνει τον τύπο της καμπύλης, η δεύτερη το βαθμό της, η τρίτη το χρόνο σε δευτερόλεπτα, η τέταρτη το βαθμό της απαλοίφουσας και η τελευταία στήλη δείχνει το (μη σφιχτό) φράγμα που παρέχει ο γενικός τύπος από το πόρισμα 3.5.5.

Αρχικά πήραμε την καμπύλη « φασόλι » του σχήματος 2.1 και εφαρμόσαμε απλούς αφινικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι έδωσαν πολύ μικρούς (5-bit) συντελεστές. Υπολογίσαμε την απαλοίφουσα τέτοιων τριάδων. Οι μεγάλοι χρόνοι δείχνουν ότι το να δουλεύουμε με καμπύλες μεγάλου βαθμού απαιτεί πολύ αποτελεσματικές υλοποιήσεις, ώστε να είναι πρακτικό, και συνίσταται η χρήση τεχνικών φιλτραρίσματος. Στη συνέχεια, θεωρήσαμε την περίπτωση 3 τυχαίων κωνικών τομών με μικρούς συντελεστές (10-bit). Σε αυτή την περίπτωση όπου  $d = 2$ , έχουμε το σφιχτό φράγμα 184, ενώ ο γενικός τύπος δίνει 512. Δοκιμάσαμε επίσης να υπολογίσουμε την απαλοίφουσα σε πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 2 και 3 (*B-splines*), με πολύ μικρούς (5-bit) συντελεστές. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι λιγότερο από 1 sec για  $d = 2$  και λιγότερο από 10 sec για  $d = 3$ . Τα πειράματα αυτά δείχνουν ότι μια αποτελεσματική ακριβής υλοποίηση μπορεί να είναι δυνατή και για μεγαλύτερα μήκη εισόδου, ενώ μπορούμε να επωφεληθούμε από την αυξημένη ευελιξία που προσφέρουν οι τμηματικές συναρτήσεις (με κλάδους), με τη σωστή ισορροπία, βέβαια, ανάμεσα στο συνολικό πλήθος μη γραμμικών αντικείμενων και την πολυπλοκότητα των αλγεβρικών πράξεων.



# Κεφάλαιο 5

## Επίλογος

Σκοπός της διατριβής ήταν η υλοποίηση του διαγράμματος Voronoi ενός συνόλου ελλείψεων του επιπέδου, υπό το πρότυπο της ακριβούς αριθμητικής. Η αναπαράσταση του « ακριβούς » διαγράμματος Voronoi γίνεται μέσω του δυϊκού του γράφου Delaunay. Για να γίνει εφικτό κάτι τέτοιο μελετήθηκαν πρώτα τα κατηγορήματα που χρειάζονται για τον αυξητικό αλγόριθμο υπολογισμού. Οι μέθοδοι που αναπτύξαμε για ελλείψεις γενικεύονται όπως είδαμε και για γενικότερες κλειστές ομαλές κυρτές εστίες.

**Μεθοδολογία.** Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα « ακριβούς » υπολογιστικής γεωμετρίας και συνίσταται από τα παρακάτω βήματα:

- Αλγεβρική μοντελοποίηση των κατηγορημάτων και μελέτη της αλγεβρικής πολυπλοκότητάς τους (βαθμός πολυωνύμων που προκύπτουν, δυαδικό μήκος συντελεστών).
- Μοντελοποίηση με διαφορετικά συστήματα. Συστήματα με βέλτιστο μικτό όγκο δεν οδηγούν απαραίτητα σε ταχύτερο υπολογισμό της απαλοιφουσας.
- Μιας και ακόμα δεν υπάρχει γενικός τρόπος υπολογισμού της απαλοιφουσας συστημάτων πολλών μεταβλητών, η διαδοχική απαλοιφή μέσω απαλοιφουσών Sylvester μπορεί να αποβεί πολύ αποδοτική.
- Μπορούμε να βελτιώσουμε την ταχύτητα των υπολογισμών χρησιμοποιώντας επαναληπτικές μεθόδους προσέγγισης της λύσης του συστήματος προσαρμο-

σμένες στο πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε αριθμητική διαστημάτων με άκρα αριθμούς κινητής υποδιαστολής, με την οποία είναι εύκολο να ελέγχουμε την εγκυρότητα των υπολογισμών. Η ταχύτητα των μεθόδων ακριβούς αριθμητικής εξαρτάται από το δυαδικό μήκος συντελεστών το οποίο μεταβάλλεται στις ενδιάμεσες ποσότητες των υπολογισμών, ενώ οι μέθοδοι κινητής υποδιαστολής δουλεύουν με μία προκαθορισμένη ακρίβεια. Στη γενική περίπτωση μη εκφυλισμένων περιπτώσεων η αριθμητική διαστημάτων μπορεί να δώσει γρήγορα μία απάντηση χωρίς να χρειαστεί να καταφύγουμε σε ακριβή λογισμό με αριθμούς μεγάλου δυαδικού μήκος. Έτσι, χρησιμοποιούμε ακριβή λογισμό μόνο όταν η προσεγγιστική λύση δεν μπορεί να δώσει απάντηση.

- Γενικότερα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικά φίλτρα για όλες τις αλγεβρικές πράξεις οι οποίες παίρνουν χρόνο. Το ποιες είναι αυτές οι πράξεις δεν είναι προφανές (δεν ισχύει απαραίτητα ότι μία ακριβής μέθοδος είναι πιο αργή από μία αριθμητική), αλλά μπορεί να προσδιοριστεί μελετώντας την κατανομή του χρόνου εκτέλεσης (profiling).

**Ανοιχτά προβλήματα.** Σχετικά με το πρόβλημα που μελετήσαμε, παραμένουν ακόμα ανοιχτά κάποια ερωτήματα τα οποία παρουσιάζουν ίσως θεωρητικό ενδιαφέρον:

- Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος *πραγματικών* τριεφαπτόμενων κύκλων σε τρεις ελλείψεις; Αυτό ανάγεται σε υπολογισμό φραγμάτων για το πλήθος των πραγματικών ριζών πολυωνυμικών συστημάτων [64].
- Ποιο είναι το σφιχτό άνω φράγμα στο πλήθος μιγαδικών ριζών (και αντίστοιχα στο πλήθος πραγματικών ριζών) για γενικές παραμετρικές καμπύλες βαθμού  $d$ ; Ο τύπος του πορίσματος 3.5.5 αποτελεί ένα άνω φράγμα το οποίο δεν είναι σφιχτό. Όπως αναφέραμε, πιθανόν να μπορεί να υπολογιστεί ένα σφιχτό άνω φράγμα με μία πιο προσεκτική μελέτη των ενδιάμεσων πινάκων Sylvester, η οποία να λαμβάνει υπόψιν αλληλοακυρώσεις μεταξύ όρων. Ένα πρώτο βήμα (πριν αποδείξουμε τη σφιχτότητα) θα είναι να βρούμε έναν γενικό τύπο ο οποίος για  $d = 2$  να δίνει 184 αντί 512 που δίνει τώρα.
- Υπάρχουν ποιο αισιόδοξα φράγματα ειδικά για γεωμετρικά προβλήματα, έναντι του θεωρήματος 3.6.8;



**Υλοποίηση.** Εκτός από τη θεωρητική μελέτη, πολύ σημαντική είναι και η υλοποίηση. Για μία αποδοτική υλοποίηση χρειάστηκε να συνδυάσουμε διαφορετικές αλγεβρικές και αριθμητικές βιβλιοθήκες, οι οποίες μάλιστα διατίθενται « ελεύθερα » (SYNAPS, MPFR, NTL, CGAL) ενώ πειραματιστήκαμε και με άλλες βιβλιοθήκες (που όμως δεν χρησιμοποιήσαμε στην τελική υλοποίηση) όπως η ALIAS. Το MAPLE επίσης αποτέλεσε για μας ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για πειραματισμούς. Οι αλγόριθμοι που περιλαμβάνει για υπολογισμό απαλοφουσών είναι πολύ αποδοτικοί, ωστόσο πρόκειται για μία εμπορική υλοποίηση. Το τελικό αποτέλεσμα είναι αρκετά ενθαρρυντικό:

- Οι εξειδικευμένες μέθοδοι προσεγγίζουν τη λύση του συστήματος πολύ γρηγορότερα από γενικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται ως « μαύρο κουτί ».
- Η υλοποίηση είναι ακριβής. Υλοποιήσαμε αποτελεσματικά τον υπολογισμό της απαλοφουσας και μπορούμε και απαντάμε σε εκφυλισμένες περιπτώσεις χωρίς να χρειαστεί να φτάσουμε το φράγμα διαχωρισμού ή να καταφύγουμε σε προσεγγιστικές απαντήσεις.
- Είδαμε ότι τελικά το διάγραμμα Voronoi ελλείψεων μπορεί να υπολογιστεί γρηγορότερα από αντίστοιχες γεωμετρικές προσεγγίσεις οι οποίες περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό σημείων ή ευθυγράμμων τμημάτων.
- Η υλοποίησή μας χειρίζεται αλγεβρικούς αριθμούς βαθμού 184 καθιστώντας τη, απ' όσο γνωρίζουμε, ως την πρώτη υλοποίηση ακριβούς υπολογιστικής γεωμετρίας που χειρίζεται αριθμούς τέτοιου βαθμού.

Το γεγονός ότι χρησιμοποιήσαμε όλες τις παραπάνω βιβλιοθήκες δείχνει ότι δεν υπάρχει ακόμα κάποια « σάνταρ » αλγεβρική βιβλιοθήκη η οποία να περιλαμβάνει όλα μαζί τα εργαλεία που χρειάζονται. Ωστόσο έχουν γίνει σημαντικά βήματα προόδου. Οι νεότερες εκδόσεις της CGAL θα συμπεριλαμβάνουν το λεγόμενο « Αλγεβρικό Πυρήνα » ο οποίος θα παρέχει ένα πολύ αποτελεσματικό αλγεβρικό υπόβαθρο για γεωμετρικά προβλήματα. Υποστηρίζεται, ανάμεσα στα άλλα, επίλυση πολυωνύμων μίας μεταβλητής, καθώς και υπολογισμός απαλοφουσών πολυωνυμικών συστημάτων πολλών μεταβλητών χρησιμοποιώντας παρεμβολή. Έτσι, θα μπορεί κάποιος να αναπτύξει κώδικα ο οποίος να μην εξαρτάται από άλλες βιβλιοθήκες πέραν της CGAL. Μία άλλη προσπάθεια ανοιχτού κώδικα είναι το MATHEMAGIX το

οποίο ουσιαστικά είναι ο διάδοχος των αλγεβρικών και αριθμητικών βιβλιοθηκών της SYNAPS. Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι, ενώ η επίλυση πολυωνύμων μίας μεταβλητής έχει πλέον αντιμετωπιστεί πολύ αποτελεσματικά και αυτοματοποιημένα [65, όπου έχουν χρησιμοποιηθεί και πολυώνυμα βαθμού 184 που υπολογίστηκαν με τις μεθόδους μας], δεν υπάρχουν ακόμη αποτελεσματικές υλοποιήσεις για (αυτοματοποιημένη) ακριβή επίλυση πολυωνυμικών συστημάτων και χειρισμό αλγεβρικών αριθμών μεγαλύτερης διάστασης.

**Μελλοντικές επεκτάσεις.** Μία άμεση επέκταση των μεθόδων και της υλοποίησής μας είναι ο χειρισμός διαφορετικών τύπων εστιών. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι εστίες ορίζονται τμηματικά από πολυωνυμικές ή ρητές παραμετρικές καμπύλες, δηλαδή  $t \in [a, b]$  αντί  $t \in \mathbb{R}$ . Ο ορισμός αυτός μπορεί να αναπαραστήσει περισσότερα σχήματα, ωστόσο αυξάνει το πλήθος των καμπυλών εισόδου. Επίσης, κάποιες πράξεις οι οποίες ήταν τετριμμένες δεν είναι πλέον. Για παράδειγμα, φανταστείτε ότι θέλουμε να εξετάσουμε αν ένα σημείο  $q$  βρίσκεται εντός μίας κλειστής κυρτής εστίας. Σε μια τέτοια περίπτωση, δεν υπάρχουν εφαπτομένες ευθείες στην εστία που να διέρχονται από το  $q$ . Το πρόβλημα ανάγεται στο ερώτημα αν ένα πολυώνυμο έχει ή όχι πραγματικές ρίζες στο  $\mathbb{R}$  (π.χ. ένα τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα). Όταν όμως  $t \in [a, b]$ , το  $q$  μπορεί να ανήκει εντός της εστίας και παρ' όλα αυτά να υπάρχουν εφαπτομένες στην καμπύλη, όπου όμως το σημείο επαφής βρίσκεται εκτός του  $[a, b]$ . Προσέξτε ότι (π.χ. στην περίπτωση τριωνύμου) όχι μόνο δεν επαρκεί το πρόσημο της διακρίνουσας, αλλά πρέπει να εξετάσουμε όλες τις ρίζες και να βρούμε ποιες βρίσκονται εντός του διαστήματος ορισμού!

Επίσης, χρειάζεται επιπλέον δουλειά στο πώς θα επιλέξουμε τις καμπύλες (του συνόρου των εστιών) με τις οποίες θα υπολογίσουμε την απαλοίφουσα του συστήματος για την εύρεση του κύκλου Voronoi. Προσέξτε ότι τώρα μία εστία ορίζεται από πολλές καμπύλες και ότι το σημείο επαφής ενός κύκλου Voronoi είναι ρίζα της απαλοίφουσας ενός αλγεβρικού συστήματος μίας τριάδας καμπυλών όπου έχουμε επιλέξει μία καμπύλη από κάθε εστία. Θα πρέπει η επιλογή αυτή να γίνει έξυπνα, ώστε να μην καταφύγουμε σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Μία άλλη δυσκολότερη επέκταση είναι ο ακριβής υπολογισμός του διαγράμματος Voronoi εστιών στις τρεις διαστάσεις (ευθείες, ελλειψοειδή). Παρότι οι εστίες μπορεί να είναι γραμμικά αντικείμενα (ευθείες), τα κελιά Voronoi αποτελούνται από τμήματα υπερβολικών παραβολοειδών, ενώ στις τρεις διαστάσεις έχουμε να χειριστούμε

και τριχοτόμους καμπύλες, οι οποίες μπορεί να είναι καμπύλες τετάρτου βαθμού. Στην περίπτωση ευθειών, η ακριβής πολυπλοκότητα του διαγράμματος Voronoi παραμένει σημαντικό ανοιχτό πρόβλημα και μόλις πρόσφατα άρχισε να μελετάται [66].



# Βιβλιογραφία

- [1] F. Aurenhammer, *Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure*, vol. 23. ACM Computing Surveys, 1991.
- [2] P. Giblin and B. Kimia, “On the local form and transitions of symmetry sets, medial axes, and shocks,” *Int. J. Comput. Vision*, vol. 54, no. 1-3, pp. 143–156, 2003.
- [3] M. Held, “Vroni: An engineering approach to the reliable and efficient computation of Voronoi diagrams of points and line segments,” *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 18, pp. 95–123, 2001.
- [4] M. Karavelas, “A robust and efficient implementation for the segment Voronoi diagram,” in *Proc. 1st Int. Symp. Voronoi Diagrams*, pp. 51–62, 2004.
- [5] M. McAllister, D. Kirkpatrick, and J. Snoeyink, “A compact piecewise-linear Voronoi diagram for convex sites in the plane,” *Discr. Comput. Geometry*, vol. 15, pp. 73–105, 1996.
- [6] R. Ramamurthy and R. Farouki, “Voronoi diagram and medial axis algorithm for planar domains with curved boundaries I. Theoretical foundations,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 102, no. 1, pp. 119–141, 1999.
- [7] H. Alt, O. Cheong, and A. Vigneron, “The Voronoi Diagram of Curved Objects,” *Discr. & Comput. Geom.*, vol. 34, pp. 439–453, Sep 2005.
- [8] J.-D. Boissonnat and M. Karavelas, “On the combinatorial complexity of Euclidean Voronoi cells and convex hulls of d-dimensional spheres,” in *Proc. 14th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 305–312, 2003.

- [9] P. Harrington, C. Ó'Dúnlaing, and C.-K. Yap, "Optimal voronoi diagram construction with  $n$  convex sites in three dimensions," *Intern. J. Comput. Geom. Appl.*, vol. 17, no. 6, pp. 555–593, 2007.
- [10] J.-D. Boissonnat and C. Delage, "Convex hull and Voronoi diagram of additively weighted points," in *Proc. 13th Europ. Symp. Algorithms*, vol. 3669 of *LNCS*, pp. 367–378, Springer-Verlag, 2005.
- [11] I. Hanniel, R. Muthuganapathy, G. Elber, and M.-S. Kim, "Precise Voronoi cell extraction of free-form rational planar closed curves," in *Proc. 2005 ACM Symp. Solid and Phys. Modeling*, (Cambridge, Massachusetts), pp. 51–59, 2005. (Best paper award).
- [12] M. Ramanathan and B. Gurumoorthy, "Constructing medial axis transform of planar domains with curved boundaries," *Comp.-Aid. Des.*, vol. 35, no. 7, pp. 619–632, 2003.
- [13] R. Ramamurthy and R. T. Farouki, "Voronoi diagram and medial axis algorithm for planar domains with curved boundaries - II: Detailed algorithm description," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 102, no. 2, pp. 253–277, 1999.
- [14] J.-K. Seong, E. Cohen, and G. Elber, "Voronoi diagram computations for planar NURBS curves," in *Proc. 2008 ACM Symp. Solid and Phys. Modeling*, (New York, NY, USA), pp. 67–77, ACM, 2008.
- [15] D.-S. Kim, D. Kim, and K. Sugihara, "Voronoi diagram of a circle set from Voronoi diagram of a point set: I. Topology," *Comp. Aid. Geom. Des.*, vol. 18, no. 6, pp. 541–562, 2001.
- [16] D.-S. Kim, D. Kim, and K. Sugihara, "Voronoi diagram of a circle set from Voronoi diagram of a point set: II. Geometry," *Comp. Aid. Geom. Des.*, vol. 18, no. 6, pp. 563–585, 2001.
- [17] M. Held and S. Huber, "Topology-oriented incremental computation of voronoi diagrams of circular arcs and straight-line segments," *Comp.-Aid. Des.*, vol. 41, no. 5, pp. 327–338, 2009.

- [18] R. Farouki and R. Ramamurthy, “Degenerate point/curve and curve/curve bisectors arising in medial axis computations for planar domains with curved boundaries,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 15, pp. 615–635, 1998.
- [19] O. Aichholzer, W. Aigner, F. Aurenhammer, T. Hackl, B. Jüttler, and M. Rabl, “Medial axis computation for planar free-form shapes,” *Comp.-Aid. Des.*, vol. 41, no. 5, pp. 339–349, 2009.
- [20] C. K. Yap, “Complete subdivision algorithms, I: Intersection of Bézier curves,” in *Proc. 22nd ACM Symp. on Computational Geometry*, pp. 217–226, 2006.
- [21] D. Attali and J.-D. Boissonnat, “Complexity of the Delaunay Triangulation of Points on Polyhedral Surfaces.,” *Discr. & Comput. Geom.*, vol. 30, no. 3, pp. 437–452, 2003.
- [22] I. Boada, N. Coll, and J. Sellarès, “Multiresolution approximations of generalized Voronoi diagrams,” in *Proc. Intern. Conf. Comp. Science*, pp. 98–106, 2004.
- [23] F. Anton, *Voronoi diagrams of semi-algebraic sets*. PhD thesis, The University of British Columbia, Jan. 2004.
- [24] I. Emiris and M. Karavelas, “The predicates of the Apollonius diagram: algorithmic analysis and implementation,” *Comp. Geom.: Theory & Appl., Spec. Issue on Robust Geometric Algorithms and their Implementations*, vol. 33, no. 1-2, pp. 18–57, 2006.
- [25] “CGAL: Computational geometry algorithms library.” <http://www.cgal.org>.
- [26] E. Berberich, A. Eigenwillig, M. Hemmer, S. Hert, L. Kettner, K. Mehlhorn, J. Reichel, S. Schmitt, E. Schömer, and N. Wolpert, “EXACUS: Efficient and exact algorithms for curves and surfaces.,” in *Proc. 13th Europ. Symp. Algorithms*, pp. 155–166, 2005.
- [27] I. Hanniel and R. Wein, “An exact, complete and efficient computation of arrangements of Bézier curves,” in *Proc. 2007 ACM Symp. Solid and Phys. Modeling*, (Beijing, China), pp. 253–263, ACM Press, 2007.

- [28] M. Karavelas and M. Yvinec, “Voronoi diagram of convex objects in the plane,” in *Proc. 11th Europ. Symp. Algorithms*, LNCS, pp. 337–348, Springer, 2003.
- [29] M. Karavelas and M. Yvinec, “Dynamic additively weighted Voronoi diagrams in 2D,” in *Proc. 10th Europ. Symp. Algorithms*, LNCS, pp. 586–598, Springer, 2002.
- [30] R. Klein, K. Mehlhorn, and S. Meiser, “Randomized incremental construction of abstract Voronoi diagrams,” *Comput. Geom. Theory Appl.*, vol. 3, no. 3, pp. 157–184, 1993.
- [31] C. K. Yap and T. Dubé, “The exact computation paradigm,” in *Computing in Euclidean Geometry* (D.-Z. Du and F. K. Hwang, eds.), vol. 4 of *Lecture Notes Series on Computing*, pp. 452–492, Singapore: World Scientific, 2nd ed., 1995.
- [32] I. Z. Emiris, E. P. Tsigaridas, and G. M. Tzoumas, “Predicates for the exact Voronoi diagram of ellipses under the euclidean metric,” *Intern. J. Comp. Geom. & Appl.*, vol. 18, no. 6, pp. 567–597, 2008. Special Issue.
- [33] I. Emiris and G. Tzoumas, “Exact and efficient evaluation of the InCircle predicate for parametric ellipses and smooth convex objects,” *Comp.-Aid. Des.*, vol. 40, no. 6, pp. 691–700, 2008.
- [34] I. Emiris, E. Tsigaridas, and G. Tzoumas, “Exact Delaunay graph of smooth convex pseudo-circles: General predicates, and implementation for ellipses,” in *Proc. SIAM/ACM Joint Conf. Geometric & Solid Modeling*, (San Francisco), October 2009. To appear.
- [35] B. Mourrain, J. P. Pavone, P. Trébuchet, and E. Tsigaridas, “SYNAPS, a library for symbolic-numeric computation,” in *8th Int. Symposium on Effective Methods in Algebraic Geometry, MEGA*, (Sardinia, Italy), May 2005. Software presentation. <http://www-sop.inria.fr/galaad/synaps/>.
- [36] C. Yap, *Fundamental Problems of Algorithmic Algebra*. New York: Oxford University Press, 2000.



- [37] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *Using Algebraic Geometry*. No. 185 in Graduate Texts in Math., New York: Springer, 2nd ed., 2005.
- [38] W. Wang, J. Wang, and M. Kim, “An algebraic condition for the separation of two ellipsoids,” *Comp. Aided Geom. Design*, vol. 18, pp. 531–539, 2001.
- [39] F. Etayo, L. Gonzalez-Vega, and N. del Rio, “A new approach to characterizing the relative position of two ellipses depending on one parameter,” *Comp. Aid. Geom. Des.*, vol. 23, no. 4, pp. 324–350, 2006.
- [40] D. I. Diochnos, I. Z. Emiris, and E. P. Tsigaridas, “On the asymptotic and practical complexity of solving bivariate systems over the reals,” *J. Symbolic Computation*, vol. 44, no. 7, pp. 818–835, 2009.
- [41] E. W. Weisstein, “Evolute,” *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/Evolute.html>.
- [42] F. Hartmann and R. Jantzen, “Apollonius’ ellipse and evolute revisited,” Sept. 2003. Manuscript. <http://www42.homepage.villanova.edu/frederick.hartmann/resume.html>.
- [43] I. Z. Emiris, B. Mourrain, and E. P. Tsigaridas, “Real algebraic numbers: complexity analysis and experimentation,” in *Reliable Implementations of Real Number Algorithms: Theory and Practice* (P. Hertling, C. Hoffmann, W. Luther, and N. Revol, eds.), vol. 5045 of LNCS, pp. 57–82, Springer Verlag, 2008.
- [44] I. Emiris and E. Tsigaridas, “Computing with real algebraic numbers of small degree,” in *Proc. 12th Europ. Symp. Algorithms*, LNCS, pp. 652–663, Springer, 2004.
- [45] P. Angelier, *Algorithmique des graphes de visibilité*. PhD thesis, Université Paris VII, 2002.
- [46] R. Wein, J. P. van den Berg, and D. Halperin, “The visibility–voronoi complex and its applications,” in *Proc. 21st ACM Symp. on Computational Geometry*, (New York, NY, USA), pp. 63–72, ACM, 2005.

- [47] G. Elber, M.-S. Kim, and H.-S. Heo, “The convex hull of rational plane curves,” *Graph. Models*, vol. 63, no. 3, pp. 151–162, 2001.
- [48] L. Habert, “Computing bitangents for ellipses,” in *Proc. 17th Canad. Conf. Comp. Geom.*, pp. 294–297, 2005.
- [49] J. Verschelde, “PHCpack: A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 25, no. 2, pp. 251–276, 1999. <http://www.math.uic.edu/~jan/PHCpack/>.
- [50] G. Elber, 2007. Personal communication.
- [51] F. Ronga, 2005. Personal communication between F. Ronga and S. Petitjean.
- [52] Y. Lebbah, “ICOS: Interval CONstraints Solver,” 2004. <http://users.polytech.unice.fr/~lebbah/icos/>.
- [53] D. Lazard, 2006. Personal communication.
- [54] J.-C. Faugère, “Fgb - a software for computing Gröbner bases.” <http://fgbrs.lip6.fr/salsa/Software/>.
- [55] G. Elber and M.-S. Kim, “Bisector curves of planar rational curves,” *Comp.-Aid. Des.*, vol. 30, pp. 1089–1096, 1998.
- [56] J. J. Chou, “Voronoi diagrams for planar shapes,” *IEEE Comput. Graph. Appl.*, vol. 15, no. 2, pp. 52–59, 1995.
- [57] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and Singularities (2nd edition)*. New York: Cambridge University Press, 1992.
- [58] J. Canny, *The Complexity of Robot Motion Planning*. ACM – MIT Press Doctoral Dissertation Award Series, Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
- [59] S. Bialas and M. Góra, “Some properties of zeros of polynomials with vanishing coefficients,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 430, no. 8-9, pp. 1976 – 1991, 2009.

- [60] E. P. Tsigaridas and I. Z. Emiris, “On the complexity of real root isolation using Continued Fractions,” *Theoretical Comp. Science*, vol. 392, pp. 158–173, 2008.
- [61] V. Shoup, “NTL: Number Theory Library.” <http://www.shoup.net/ntl/>.
- [62] L. Fousse, G. Hanrot, V. Lefèvre, P. Pélicissier, and P. Zimmermann, “MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 33, pp. 13:1–13:15, June 2007. <http://www.mpfr.org/>.
- [63] J.-P. Merlet, “ALIAS: an interval analysis based library for solving and analyzing system of equations,” in *Systèmes d’Équations Algébriques*, (Toulouse, France), 2000.
- [64] B. Sturmfels, *On the Number of Real Roots of a Sparse Polynomial System*, vol. 3, pp. 137–143. Providence, RI: AMS, Fields Inst. Commun., 1994.
- [65] M. Hemmer, E. P. Tsigaridas, Z. Zafeirakopoulos, I. Z. Emiris, M. I. Karavelas, and B. Mourrain, “Experimental evaluation and cross-benchmarking of univariate real solvers,” in *SNC ’09: Proceedings of the 2009 conference on Symbolic numeric computation*, (New York, NY, USA), pp. 45–54, ACM, 2009.
- [66] H. Everett, D. Lazard, S. Lazard, and M. S. E. Din, “The voronoi diagram of three lines,” *Discr. & Comput. Geom.*, vol. 42, no. 1, pp. 94–130, 2009.